Обобщенные покрытия и их аппроксимации[1]

Н. Н. Кузюрин

Аннотация. Обобщенное покрытие $(0, \pm 1)$-матрицы — это подмножество ее столбцов такое, что сумма элементов в каждой строке положительна. Получены верхние и нижние оценки размера минимальных обобщенных покрытий $(0, \pm 1)$–матриц. Найдены достаточные условия, при которых верхние и нижние оценки имеют одинаковый порядок роста.

1. Введение

Задача о покрытии — одна из старейших и наиболее изученных NP-трудных задач [11, 10, 12, 6, 9]. Для данного базового множества U из m элементов, цель заключается в покрытии U наименьшим возможным числом множеств из заданного семейства подмножеств. Один из самых известных приближенных полиномиальных алгоритмов для аппроксимации покрытия — это жадный алгоритм: на каждом шаге он выбирает неиспользованное множество, содержащее наибольшее число остающихся непокрытыми элементов.

Ловас [12] и Джонсон [10] показали, что точность приближения, гарантируемая жадным алгоритмом, не хуже, чем $H(m)$, где $H(m) = 1 + 1/2 + \ldots + 1/m$ — m-е гармоническое число, которое лежит между $\ln m$ и $1 + \ln m$. Похожие результаты были получены в [2, 3]. Эти результаты были улучшены немного в [14], где показано, что точность приближения, гарантируемая жадным алгоритмом, есть $\ln m - \ln\ln m + \Theta(1)$. В [7] доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ ни один полиномиальный алгоритм в задаче о покрытии не может гарантировать точность приближения $(1-\varepsilon)\ln m$, если только не выполнено включение $NP \subseteq DTIME[n^{O(\log\log n)}]$.

Хорошо известно, что задача о покрытии образует важный класс целочисленных программ

$$\min \mathbf{cx} |\ A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} \in \{0,1\}^n, \tag{1}$$

где $\mathbf{c} = (1, ..., 1)$, $\mathbf{b} = (1, ..., 1)^T$ и $A = (a_{ij})$ — произвольная $m \times n$ $(0,1)$–матрица.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 02-01-00713 и 04-01-00359.

Многие комбинаторные задачи о покрытии соответствуют классам $(0,1)$-матриц с ограничениями на число единиц в каждой строке или каждом столбце [8]. Известно (см. [3]), что для любой (0,1)-матрицы размера $m \times n$ с не менее, чем k единицами в каждой строке для величины минимального покрытия $C(A)$ выполнено

$$C(A) \leq \frac{n}{k}(1 + \ln\frac{mk}{n}). \tag{2}$$

Интересно выяснить насколько общие оценки из [12, 10] или (2) могут быть распространены на целочисленные программы (ЦП). Хватал [6] распространил результаты [12, 10] на случай взвешенной задачи о покрытии, т.е. для задачи (1) с $\mathbf{c} = (c_1, ..., c_n)$. Затем похожие оценки были получены для так называемых целочисленных программ типа покрытия, т.е. программ где все элементы A, $\mathbf{b}$, и $\mathbf{c}$ неотрицательны [13, 15]. Однако, очень мало было известно о случае, когда A может содержать отрицательные элементы наряду с положительными.

Мы рассматриваем эту проблему в настоящей работе. Более точно, рассматривается обобщение задачи о покрытии на случай, когда матрица $A = (a_{ij})$ в (1) является $(0, \pm 1)$-матрицей, т.е. $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. Обозначим значение оптимума в (1) с такими ограничениями через $C(A)$. Каждое подмножество столбцов, удовлетворяющих ограничениям (1), будем называть обобщенным покрытием матрицы A, а число столбцов в покрытии — его размером.

Отметим, что на комбинаторном языке обобщенное покрытие — это подмножество столбцов такое, что сумма элементов в каждой строке положительна. В настоящей работе получены точные по порядку верхние и нижние оценки размера минимальных обобщенных покрытий $(0, \pm 1)$-матриц. Эти оценки свидетельствуют о точности решений, получаемых методом вероятностного округления для задач целочисленного программирования с $(0, \pm 1)$-матрицами ограничений.

2. Формулировка полученных результатов

Пусть m, n, k, t — неотрицательные целые, причем $t < k \leq n$. Пусть $R(m, n, k, t)$ обозначает класс всех матриц размера $m \times n$ с элементами $-1, 0, +1$, где каждая матрица удовлетворяет следующим условиям: число $+1$ в каждой строке не меньше k, число -1 в каждом столбце — не больше t. В случае $t = 0$ это как раз тот класс $(0,1)$-матриц, для которого справедлива оценка (2).

В настоящей работе с использованием вероятностных методов получены верхние и нижние оценки величины оптимума программы (1) для произвольной матрицы $A \in R(m, n, k, t)$. Основные результаты содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть m, n, k, t — неотрицательные целые, причем $t < k \leq n$. Для произвольной матрицы $A \in R(m, n, k, t)$

$$C(A) \leq 4(e-2)(1+o(1))\frac{n}{k-t} \cdot \frac{k+t}{k-t} \cdot \ln(m+1). \quad (3)$$

Отметим, что теорема 1 дает нетривиальную верхнюю оценку когда

$$4(e-2)(1+o(1))\frac{k+t}{(k-t)^2} \cdot \ln(m+1) < 1, \quad (4)$$

поскольку в противном случае тривиальная оценка $C(A) \leq n$ лучше. Интересно выяснить, насколько точна полученная верхняя оценка. Нетрудно заметить, что она отличается от оценки (2), главным образом, наличием множителя $(k+t)/(k-t)$.

Следующая теорема показывает, что верхняя оценка из теоремы 2 точна для некоторого диапазона параметров и множитель $\frac{k+t}{k-t}$ появляется и в нижней оценке.

Теорема 2. Пусть k и t удовлетворяют условиям (n стремится к ∞):

1. $k = o(n)$,
2. $k - t = o(k)$,

   существует константа $c' > 0$ такая, что
3. $n\frac{k}{(k-t)^2} \ln n = o(m^{1-c'})$.

Тогда существует абсолютная константа $c_1 > 0$ и матрица $A \in R(m, n, k, t)$ такая, что

$$C(A) \geq c_1 \frac{n}{k-t} \cdot \frac{k}{k-t} \cdot \ln m. \quad (5)$$

Условия 1 и 2 просты. Третье условие, грубо говоря, означает, что размер обобщенного покрытия (точнее верхняя оценка из теоремы 1) существенно меньше m. Рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть $n = cm$. Тогда условие 3 принимает следующий вид

$$\frac{k}{(k-t)^2} = o(m^{-c'}).$$

Для выполнения этого условия достаточно выбрать $k = m^{2\delta}$, $t = m^{2\delta} - m^{\delta+\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon < \delta < 1/2$. Условия 1 и 2 теоремы 2 очевидно выполнены. Левая часть из условия 3 равна:

$$\frac{k}{(k-t)^2} = \frac{m^{2\delta}}{m^{2\delta+2\varepsilon}} = m^{-2\varepsilon},$$

и все условия теоремы 2 выполнены. Поэтому

$$C(A) \geq c\frac{m}{m^{2\varepsilon}} \cdot \ln m = cm^{1-2\varepsilon} \ln m.$$

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 основано на технике вероятностного округления [13, 5] и верхних оценках вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин. Для доказательства теоремы рассмотрим рациональное допустимое решение (1) $\mathbf{x}_f = (\frac{1}{k-t}, \ldots, \frac{1}{k-t})$ и умножим его на некоторое число $K \geq 1$. Получим новый вектор $K\mathbf{x}_f = (\frac{K}{k-t}, \ldots, \frac{K}{k-t})$. Очевидно, $K\mathbf{x}_f$ — также допустимое решение той же задачи. Определим случайный вектор $\mathbf{z}$, рассматривая дробную часть каждого Kx_i как вероятность p_i и округляя Kx_i до 1 с вероятностью p_i, и до 0 — с вероятностью $1 - p_i$. Затем постараемся найти подходящее значение параметра K, такое что случайный вектор $\mathbf{z}$ является допустимым решением (1).

Мы сделаем это с использованием следующей леммы.

Лемма 1. Пусть x_i, $i = 1, \ldots, n$ — независимые случайные величины принимающие значения a_i, $|a_i| \leq 1$ (некоторые из a_i могут быть и отрицательными) и 0 с вероятностями p_i и $1 - p_i$, соответственно. Пусть $X = \sum_{i=1}^n x_i$, $EX = \sum_{i=1}^n a_i p_i > 0$, и $d > 0$ таковы, что

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 p_i \leq dEX.$$

Тогда для любого $0 < \delta < 2d(e-2)$

$$P\{X - EX < -\delta EX\} \leq \exp\{-\frac{\delta^2 EX}{4d(e-2)}\}.$$

Доказательство. Пусть $t > 0$ — положительное вещественное число значение которого будет выбрано позже. Мы можем записать (с использованием первого неравенства Чебышева)

$$P\{X - EX < -\delta EX\} = P\{\exp\{t(X - EX)\} < \exp\{-\delta tEX\}\} =$$

$$P\{\exp\{t(EX - X)\} > \exp\{\delta tEX\}\} \leq \frac{E\exp\{t(EX - X)\}}{\exp\{\delta tEX\}} =$$

$$e^{-\delta tEX + tEX} \cdot Ee^{-tX} = e^{t(1-\delta)EX} \cdot \prod_{i=1}^n Ee^{-tx_i} =$$

$$e^{t(1-\delta)EX} \cdot \prod_{i=1}^{n}(p_i e^{-ta_i} + 1 - p_i) = e^{t(1-\delta)EX} \cdot \prod_{i=1}^{n}(1 + p_i(e^{-ta_i} - 1)).$$

Для доказательства леммы 1 достаточно получить верхнюю оценку $\prod_{i=1}^{n} Ee^{-tx_i}$. Рассмотрим две части этого произведения отдельно,

$$P^{+} = \prod_{i:a_i>0}(1 + p_i(e^{-ta_i} - 1)), \qquad P^{-} = \prod_{i:a_i<0}(1 + p_i(e^{-ta_i} - 1)).$$

Используя неравенство $1 + x \le e^x$, $x > 0$, получаем

$$P^{-} \le \prod_{i:a_i<0} \exp\{p_i(e^{-ta_i} - 1)\} = \exp\{\sum_{i:a_i<0} p_i(e^{-ta_i} - 1)\}.$$

Неравенство $e^x - 1 \le x + (e-2)x^2$, при $0 < x < 1$, влечет

$$P^{-} \le \exp\{\sum_{i:a_i<0}(-p_i t a_i) + (e-2)\sum_{i:a_i<0} p_i t^2 a_i^2\}.$$

Таким же образом мы можем оценить P^{+}. Используя неравенство $1 + x \le e^x$, $x > 0$ получаем

$$P^{+} \le \prod_{i:a_i>0} \exp\{p_i(e^{-ta_i} - 1)\} = \exp\{\sum_{i:a_i>0} p_i(e^{-ta_i} - 1)\}.$$

Неравенство $e^x - 1 \le x + (1/2)x^2$, при $-1 < x < 0$ влечет

$$P^{+} \le \exp\{\sum_{i:a_i>0}(-p_i t a_i) + (1/2)\sum_{i:a_i>0} p_i t^2 a_i^2\}.$$

Комбинируя оба неравенства, получаем:

$$P^{-} \cdot P^{+} \le \exp\{\sum_{i=1}^{n}(-p_i t a_i) + (e-2)\sum_{i=1}^{n} p_i t^2 a_i^2\} =$$

$$\exp\{-tEX + (e-2)t^2 \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2\} \le \exp\{-tEX + (e-2)t^2 dEX\}.$$

Наконец, получаем

$$P\{X - EX < -\delta EX\} \le \exp\{t(1-\delta)EX\} \cdot \exp\{-tEX\} \cdot \exp\{(e-2)t^2 dEX\} =$$

$$\exp\{-\delta tEX\} \cdot \exp\{(e-2)t^2 dEX\}.$$

Выражение $(e-2)t^2 d - \delta t$ имеет минимум при $t = \frac{\delta}{2(e-2)d}$. Принимая это во внимание, получаем требуемое неравенство

$$P\{X - EX < -\delta EX\} \le \exp\{-\frac{\delta^2 EX}{4d(e-2)}\}.$$

С помощью леммы 1 нетрудно показать, что с большой вероятностью каждое ограничение в исходной целочисленной программе выполнено для $\mathbf{z}$. В действительности, все вероятности p_i равны и имеют вид: $p_i = p = \frac{K}{k-t}$. Событие, заключающееся в том, что некоторое ограничение нарушается для $\mathbf{z}$, можно записать так:

$$P\{X \le 0\} = P\{X - EX < -\delta EX\},$$

где $\delta = 1$, $X = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j$.

Пусть k' — число «+1» в i-й строке и t' — число «−1». Заметим, что $k' \ge k$, $t' \le t$.

Имеем $EX = p(k' - t')$. Для применения леммы 1 необходимо оценить d. Имеем $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 p_i = p(k' + t')$. Из неравенства $p(k' + t') \le dp(k' - t')$, получаем $d \ge \frac{k'+t'}{k'-t'}$. Принимая во внимание, что $k' \ge k$, $t' \le t$, нетрудно проверить, что $\frac{k'+t'}{k'-t'} \le \frac{k+t}{k-t}$. Таким образом, мы можем выбрать $d = \frac{k+t}{k-t}$. По лемме 1 (с $\delta = 1$)

$$P\{X \le 0\} \le \exp\{-\frac{\delta^2 EX}{4d(e-2)}\} = \exp\{-\frac{(k-t)K}{4(e-2)(k+t)}\}.$$

Чтобы сделать эту вероятность меньше $1/(m+1)^{1+\varepsilon}$ (с некоторым $\varepsilon \to 0$ при n стремящемся к бесконечности) достаточно положить $K = 4(e-2)(1+\varepsilon)(k+t)/(k-t)\ln(m+1)$. При таком выборе выборе K нетрудно показать, что случайный вектор $\mathbf{z}$ является допустимым и значение целевой функции не превосходит

$$(1 + o(1))4(e-2)\frac{n}{k-t} \cdot \frac{k+t}{k-t} \cdot \ln(m+1).$$

Для доказательства этого факта используем стандартные неравенства для вероятностей больших уклонений сумм Бернуллиевских случайных величин $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i$ (см. [4])

$$P\{|Y - EY| > \delta EY\} \le 2\exp\{-\frac{\delta^2}{3}EY\}.$$

В нашем случае $Y = \sum_{i=1}^{n} x_i$ — это значение целевой функции. Имеем $EY = pn = n\frac{K}{k-t}$. Принимая во внимание выбор K
($K = 4(e-2)(k+t)/(k-t)\ln(m+1)^{1+\varepsilon}$), получаем

$$EY = n\frac{K}{k-t} = 4(e-2)n\frac{k+t}{(k-t)^2}\ln(m+1)^{1+\varepsilon} > \ln m^{1+\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что

$$P\{|Y-EY|>\delta EY\}\le \exp\{-\frac{\delta^2}{3}EY\}\le m^{-\frac{\delta^2}{3}}.$$

Выбирая $\delta=3\sqrt{\varepsilon}$, получаем

$$P\{|Y-EY|>\delta EY\}\le m^{-3\varepsilon}.$$

Ввиду того, что

$$m^{-3\varepsilon}+m\cdot m^{-1-\varepsilon}<1,$$

при подходящем выборе ε (например, $\varepsilon=\frac{1}{\log m}$), мы получаем, что с положительной вероятностью все ограничения выполняются и значение целевой функции не превосходит

$$(1+o(1))4(e-2)\frac{n}{k-t}\cdot\frac{k+t}{k-t}\cdot\ln(m+1).$$

Доказательство теоремы 1 завершено.

4. Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2 более сложно. Наметим план доказательства. В действительности, мы доказываем, что при условиях теоремы 2 для почти всех $(0,\pm1)$-матриц с k единицами и t «-1» в каждой строке выполнено неравенство (5). Рассматривая все такие матрицы как элементы некоторого вероятностного пространства и приписывая всем матрицам равные вероятности мы можем рассматривать элементы a_{ij} как случайные величины. Нетрудно проверить, что $P\{a_{ij}=1\}=k/n$, $P\{a_{ij}=-1\}=t/n$, $P\{a_{ij}=0\}=1-(k+t)/n$. Более того, случайные величины a_{ij}, $i=1,\ldots,m$ независимы (для каждого j).

Зафиксируем произвольное подмножество из l столбцов и произвольную строку. Пусть Y — случайная величина, равная числу единиц в пересечении этих l столбцов и нашей строки, и пусть Z — случайная величина, равная числу минус единиц в пересечении этих l столбцов и нашей строки.

Пусть $X(l)$ — случайная величина, равная числу обобщенных покрытий из l столбцов. Наша цель заключается в том, чтобы оценить математическое ожидание $X(l)$. Имеем:

$$EX(l)=\binom{n}{l}\left(1-P\{Z\ge Y\}\right)^m.$$

Дальнейшая цель состоит в доказательстве того, что при условиях теоремы 2 $EX(l)\to 0$ при $n\to\infty$, где

$$l=c_1\frac{nk}{(k-t)^2}\ln m$$

для некоторой константы $c_1>0$.

Для того, чтобы сделать это необходимо получить подходящую верхнюю оценку $EX(l)$. Таким образом, нужно получить нижнюю оценку для $P\{Z\ge Y\}$. Это главная техническая трудность в доказательстве теоремы 2. Мы сделаем это в последовательности лемм. Следующие две леммы просты.

Лемма 2. $P\{Z\ge Y\}\ge\sum_{r\ge r'}P\{Z=r,Y=r'\}$.

Лемма 3.

$$P\{Z=r,Y=r'\}=\frac{\binom{l}{r}\binom{n-l}{t-r}}{\binom{n}{t}}\cdot\frac{\binom{l-r}{r'}\binom{n-l-t+r}{k-r'}}{\binom{n-t}{k}}.$$

Обозначим первую дробь в правой части через P_1, и вторую дробь — через P_2 соответственно. Наша цель заключается в том, чтобы оценить снизу P_1 и P_2.

Прежде всего представим r из интервала (EZ,EY) в следующем виде: $r=cEZ+(1-c)EY$, где $0<c<1$. Заметим, что $EZ=lt/n$, $EY=lk/n$. Следовательно,

$$r=c\cdot\frac{lt}{n}+(1-c)\cdot\frac{lk}{n}=\frac{l}{n}(ct+(1-c)k)=$$

$$\frac{l}{n}(ct+(1-c)(k-t+t))=\frac{l}{n}(t+(1-c)(k-t))=$$

$$\frac{lt}{n}(1+(1-c)\cdot\frac{k-t}{t})=\frac{lt}{n}(1+\delta),$$

где $\delta=(1-c)\cdot\frac{k-t}{t}$.

Лемма 4. Пусть выполнены условия: $k=o(n)$, $k-t=o(k)$, $l=o(n)$, и

$$P_1=\frac{\binom{l}{r}\binom{n-l}{t-r}}{\binom{n}{t}},$$

где $r=\frac{lt}{n}(1+\delta)$, $\delta=(1-c)\cdot\frac{k-t}{t}$, $0<c<1$ — константа. Тогда

$$P_1\ge\frac{1}{4\sqrt{lt/n}}\cdot\exp\{-\delta^2\frac{lt}{n}(1+o(1))\}.$$

Доказательство. Принимая во внимание представление r, имеем:

$$P_1=\frac{\binom{l}{r}\binom{n-l}{t-r}}{\binom{n}{t}}=\frac{\binom{l}{lt/n(1+\delta)}\cdot\binom{n-l}{t-(1+\delta)lt/n}}{\binom{n}{t}}.$$

Перепишем P_1 в следующем виде:

$$P_1 = \frac{\binom{l}{r}\binom{n-l}{t-r}}{\binom{n}{t}} = \frac{\binom{l}{lt/n}\binom{n-l}{t-lt/n}}{\binom{n}{t}} \cdot \frac{\binom{l}{lt/n(1+\delta)}}{\binom{l}{lt/n}} \cdot \frac{\binom{n-l}{t-(1+\delta)lt/n}}{\binom{n-l}{t-lt/n}}.$$

Обозначая три множителя в правой части через R_1, R_2, и R_3 соответственно, мы будем оценивать их по отдельности.

1. Нижняя оценка R_1. Мы будем использовать неравенства (см. [1], с. 285)

$$G(n,\lambda) > \binom{n}{\lambda n} > \frac{\sqrt{\pi}}{2} G(n,\lambda), \tag{6}$$

где

$$G(n,\lambda) = \frac{\lambda^{-\lambda n}(1-\lambda)^{-(1-\lambda)n}}{\sqrt{2\pi\lambda(1-\lambda)n}},$$

и $n \geq 2$. Имеем

$$R_1 = \frac{\binom{l}{lt/n}\binom{n-l}{t-lt/n}}{\binom{n}{t}}.$$

Используя неравенство (6) с $\lambda = \frac{t}{n}$ получаем

$$\binom{l}{lt/n} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{lt/n(1-t/n)}} \left(\frac{t}{n}\right)^{-lt/n} \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-l(1-t/n)}.$$

Используя неравенство (6) с $\lambda = \frac{t(1-\frac{l}{n})}{n-l} = \frac{t}{n}$ получаем

$$\binom{n-l}{t(1-l/n)} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{t}} \left(\frac{t}{n}\right)^{-t(1-l/n)} \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-(n-t)(1-l/n)}.$$

Используя неравенство (6) с $\lambda = \frac{t}{n}$ получаем

$$\binom{n}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t(1-t/n)}} \left(\frac{t}{n}\right)^{-t} \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-(n-t)}.$$

Используя полученные неравенства мы можем оценить R_1 следующим образом:

$$R_1 = \frac{\binom{l}{lt/n}\binom{n-l}{t-lt/n}}{\binom{n}{t}} \geq \frac{\sqrt{2\pi t}}{8\sqrt{lt/n}\sqrt{t}} \left(\frac{t}{n}\right)^{-lt/n}.$$

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^{-l(1-t/n)} \left(\frac{t}{n}\right)^{-t(1-l/n)} \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-(n-t)(1-l/n)} \left(\frac{t}{n}\right)^{t} \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-t} =$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}\sqrt{lt/n}} \geq \frac{1}{4\sqrt{lt/n}}.$$

2. Нижняя оценка R_2. Имеем:

$$\begin{aligned}
R_2 &= \frac{\binom{l}{(1+\delta)lt/n}}{\binom{l}{lt/n}} \geq \frac{(l)_{(1+\delta)lt/n}(lt/n)!}{(l)_{lt/n}((1+\delta)lt/n)!} \\
&= \frac{(l-lt/n)_{\delta lt/n}}{((1+\delta)lt/n)_{\delta lt/n}} \geq \left(\frac{l-(1+\delta)lt/n}{(1+\delta)lt/n)}\right)^{\delta lt/n} \\
&= \left(\frac{1-(1+\delta)\frac{t}{n}}{(1+\delta)\frac{t}{n}}\right)^{\delta lt/n} = \left(\frac{n}{t}\cdot\frac{1-(1+\delta)\frac{t}{n}}{1+\delta}\right)^{\delta lt/n}.
\end{aligned}$$

3. Нижняя оценка R_3.
Имеем

$$\begin{aligned}
R_3 &= \frac{\binom{n-l}{t-(1+\delta)lt/n}}{\binom{n-l}{t-lt/n}} \geq \frac{(n-l)_{t-(1+\delta)lt/n}(t-lt/n)!}{(n-l)_{t-lt/n}(t-(1+\delta)lt/n)!} \\
&\geq \frac{(t-lt/n)_{\delta lt/n}}{(n-l-t+lt/n)^{\delta lt/n}} \geq \left(\frac{t-(1+\delta)lt/n}{n-l-t+lt/n}\right)^{\delta lt/n} \\
&= \left(\frac{t}{n}\cdot\frac{1-(1+\delta)\frac{l}{n}}{1-\frac{l+t}{n}+\frac{lt}{n^2}}\right)^{\delta lt/n}.
\end{aligned}$$

Теперь мы готовы оценить $R_2 \cdot R_3$.

$$R_2 \cdot R_3 \geq \left(\frac{(1-(1+\delta)\frac{l}{n})(1-(1+\delta)\frac{t}{n})}{(1-\frac{l+t}{n}+\frac{lt}{n^2})(1+\delta)}\right)^{\delta\frac{lt}{n}} \geq$$

$$\left(\frac{1+\delta-(1+\delta)\frac{l+t}{n}+(1+\delta)\frac{lt}{n^2}+(1+\delta)^2\frac{lt}{n^2}-\delta-(1+\delta)\frac{lt}{n^2}}{1+\delta-(1+\delta)\frac{l+t}{n}+(1+\delta)\frac{lt}{n^2}}\right)^{\delta\frac{lt}{n}} =$$

$$\left(1-\frac{\delta-\delta(1+\delta)\frac{lt}{n^2}}{1+\delta-(1+\delta)\frac{l+t}{n}+(1+\delta)\frac{lt}{n^2}}\right)^{\delta\frac{lt}{n}} \geq$$

$$\left(1-\delta\frac{1+O(\frac{lt}{n^2})}{1-(1+\delta)\frac{l+t}{n}}\right)^{\delta\frac{lt}{n}}.$$

Из условия теоремы вытекает, что $l = o(n)$ и $\delta = c\frac{k-t}{t} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда получаем

$$R_2 \cdot R_3 \geq (1 - \delta(1 + o(1))^{\delta\frac{lt}{n}}.$$

Наконец, имеем

$$R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \geq \frac{1}{4\sqrt{lt/n}}(1 - \delta(1 + o(1))^{\delta\frac{lt}{n}}.$$

Используя неравенство $1 - x \geq e^{-\frac{x}{1-x}}$, $0 < x < 1$, с $x = \delta(1 + o(1))$ мы можем записать

$$\begin{aligned} R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 &\geq \frac{1}{4\sqrt{lt/n}} \cdot \exp\{-\frac{\delta}{1 - \delta(1 + o(1))} \cdot \delta\frac{lt}{n}\} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{lt/n}} \cdot \exp\{-\delta^2\frac{lt}{n} \cdot (1 + o(1))\}. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Теперь представим r' из интервала (EZ, EY) как и выше: $r' = c'EZ + (1 - c')EY$, где $0 < c' < 1$. Принимая во внимание, что $EZ = lt/n$, $EY = lk/n$, получаем

$$r' = c' \cdot \frac{lt}{n} + (1 - c') \cdot \frac{lk}{n} = \frac{l}{n}(c't + (1 - c')k) =$$

$$\frac{l}{n}(c't + (1 - c')(k - t + t)) = \frac{l}{n}(k - (k - t) + (1 - c')(k - t)) =$$

$$\frac{lk}{n}(1 - c' \cdot \frac{k - t}{k}) = \frac{lk}{n}(1 - \delta_1),$$

где $\delta_1 = c' \cdot \frac{k-t}{k}$.

Лемма 5. Пусть выполнены условия $k = o(n)$, $k - t = o(k)$, $l = o(n)$, и

$$P_2 = \frac{\binom{l-r}{r'}\binom{n-l-t+r}{k-r'}}{\binom{n-t}{k}},$$

где $r = \frac{lt}{n}(1 + \delta)$, $\delta = (1 - c) \cdot \frac{k-t}{t}$, $0 < c < 1$ — константа, $r' = \frac{lk}{n}(1 - \delta_1)$, $\delta_1 = c' \cdot \frac{k-t}{k}$, $0 < c' < 1$ — константа. Тогда

$$P_2 \geq \frac{1}{4\sqrt{lk/n}} \cdot \exp\{-\delta_1^2\frac{lk}{n}(1 + o(1))\}.$$

Доказательство леммы 5. Наша цель — оценить снизу P_2, где

$$P_2 = \frac{\binom{l-r}{r'}\binom{n-l-t+r}{k-r'}}{\binom{n-t}{k}}.$$

Заменим переменные в P_2 следующим образом: $l' = l - r$, $n' = n - t$. Теперь цель в том, чтобы переписать r' в виде:

$$r' = \frac{kl'}{n'}(1 - \delta')$$

и оценить δ'. Имеем

$$r' = \frac{lk}{n}(1 - \delta_1) = \frac{(l' + r)k}{n' + t}(1 - \delta_1) = \frac{(l' + \frac{(l'+r)k}{n'+t}(1 - \delta))k}{n' + t}(1 - \delta_1).$$

Следовательно, можем записать уравнение

$$\frac{l'k}{n'}(1 - \delta') = \frac{(l' + \frac{(l'+r)k}{n'+t}(1 - \delta_1))k}{n' + t}(1 - \delta_1).$$

Упрощая, получаем

$$1 - \delta' = \frac{1 + \frac{(1+r/l')k}{n'+t}(1 - \delta_1)}{1 + t/n'}(1 - \delta_1).$$

При условиях теоремы 2 имеем:

$$\delta' = \delta_1(1 - o(1)) + \frac{k - t}{n'} = \delta_1(1 + o(1)).$$

Имеем

$$P_2 = \frac{\binom{l-r}{r'}\binom{n-l-t+r}{k-r'}}{\binom{n-t}{k}} = \frac{\binom{l'}{r'}\binom{n'-l'}{k-r'}}{\binom{n'}{k}} = \frac{\binom{l'}{l'k/n'(1-\delta')} \cdot \binom{n'-l'}{k-(1-\delta')l'k/n'}}{\binom{n'}{k}}.$$

Как и раньше мы начинаем с представления P_2 в следующем виде:

$$P_2 = \frac{\binom{l'}{l'k/n'}\binom{n'-l'}{k-l'k/n'}}{\binom{n'}{k}} \cdot \frac{\binom{l'}{l'k/n'(1-\delta')}}{\binom{l'}{l'k/n'}} \cdot \frac{\binom{n'-l'}{k-(1-\delta)l'k/n'}}{\binom{n'-l'}{k-l'k/n'}}.$$

Используя, как и раньше, нижнюю оценку (6), получаем

$$R_1 = \frac{\binom{l'}{l'k/n'}\binom{n'-l'}{k-l'k/n'}}{\binom{n'}{k}} \geq \frac{1}{4\sqrt{l'k/n'}}.$$

2. Нижняя оценка R_2. Имеем:

$$\begin{aligned}
R_2 &= \frac{\binom{l'}{(1-\delta')l'k/n'}}{\binom{l'}{l'k/n'}} \geq \frac{(l')_{(1-\delta')l'k/n'}(l'k/n')!}{(l')_{l'k/n'}((1-\delta')l'k/n')!} \\
&= \frac{(l'k/n')_{\delta' l'k/n'}}{(l'-l'k/n'(1-\delta'))_{\delta' l'k/n'}} \geq \left(\frac{(1-\delta')l'k/n'}{l'-(1-\delta')l'k/n'}\right)^{\delta' l'k/n'} \\
&= \left(\frac{1-\delta'}{1-(1-\delta')\frac{k}{n'}}\cdot\frac{k}{n'}\right)^{\delta' l'k/n'}.
\end{aligned}$$

3. Нижняя оценка R_3. Имеем

$$\begin{aligned}
R_3 &= \frac{\binom{n'-l'}{k-(1-\delta')l'k/n'}}{\binom{n'-l'}{k-l'k/n'}} \geq \frac{(n'-l')_{k-(1-\delta')l'k/n'}(k-l'k/n')!}{(n'-l')_{k-l'k/n'}(k-(1-\delta')l'k/n')!} \\
&\geq \frac{(n'-l'-k+l'k/n')^{\delta' l'k/n'}}{(k-(1-\delta')l'k/n')_{\delta' l'k/n'}} \geq \left(\frac{n'-l'-k+l'k/n'}{k-(1-\delta')l'k/n'}\right)^{\delta' l'k/n'} \\
&= \left(\frac{n'}{k}\cdot\frac{1-\frac{l'+k}{n'}+\frac{l'k}{n^2}}{1-\frac{l'}{n'}(1-\delta')}\right)^{\delta' l'k/n'}.
\end{aligned}$$

Теперь мы готовы оценить $R_2 \cdot R_3$.

$$R_2\cdot R_3 \geq \left(\frac{1-\delta'}{1-(1-\delta')\frac{k}{n'}}\cdot\frac{1-\frac{l'+k}{n'}+\frac{l'k}{n'^2}}{1-(1-\delta')\frac{l'}{n'}}\right)^{\delta'\frac{l'k}{n'}} \geq$$

$$\left(\frac{1-\delta'-(1-\delta')\frac{l'+k}{n'}+(1-\delta')\frac{l'k}{n'^2}}{1-(1-\delta')\frac{l'+k}{n'}+(1-\delta')^2\frac{l'k}{n'^2}}\right)^{\delta'\frac{l'k}{n'}} =$$

$$\left(1-\frac{\delta'+(1-\delta')\frac{l'k}{n'^2}(1-\delta'-1)}{1-(1-\delta')\frac{l'+k}{n'}+(1-\delta')^2\frac{l'k}{n'^2}}\right)^{\delta'\frac{l'k}{n'}} \geq$$

$$\left(1-\frac{\delta'(1-(1-\delta')\frac{l'k}{n'^2})}{1-(1-\delta')\frac{l'+k}{n'}}\right)^{\delta'\frac{l'k}{n'}}.$$

При условиях теоремы 2 это дает

$$R_2\cdot R_3 \geq (1-\delta'(1+o(1)))^{\delta'\frac{l'k}{n'}}.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
R_1\cdot R_2\cdot R_3 &\geq \frac{1}{4\sqrt{l'k/n'}}\cdot(1-\delta'(1+o(1)))^{\delta'\frac{l'k}{n'}} \\
&\geq \frac{1}{4\sqrt{l'k/n'}}\cdot\exp\{-\delta'^2\frac{l'k}{n'}(1+o(1))\} \\
&\geq \frac{1}{4\sqrt{lk/n}}\cdot\exp\{-\delta_1^2\frac{lk}{n}(1+o(1))\}.
\end{aligned}$$

Здесь мы опять использовали неравенство $1-x \geq e^{-\frac{x}{1-x}}$, для любого $0<x<1$ и то, что $l\sim l'$, $n\sim n'$ выполнено при условиях леммы 5. Доказательство леммы 5 закончено.

Доказательство теоремы 2. Теперь мы готовы показать, что при условиях теоремы 2

$$EX(l_1)\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

где

$$l_1 = c_1\frac{nk}{(k-t)^2}\ln m.$$

Покажем, что тогда для любой константы $c_1>0$ при достаточно больших n

$$P\{Z\geq Y\}\geq m^{-c_1}.$$

Ограничивая суммирование в лемме 2 на область $r=cEZ+(1-c)EY$, $1/3\leq c\leq 2/3$, $r'=c'EZ+(1-c')EY$, $1/6\leq c'\leq 1/3$, заметим, что $\delta=(1-c)\frac{k-t}{t}\leq\frac{2}{3}\frac{k-t}{t}$, $\delta_1=c'\frac{k-t}{k}\leq\frac{2}{3}\frac{k-t}{k}$. По леммам 4 и 5 каждое слагаемое в сумме может быть оценено снизу так:

$$P\{Z=r, Y=r'\}\geq\frac{n}{16l\sqrt{kt}}\cdot\exp\{-(4/9)\frac{(k-t)^2}{k^2}\frac{l(k+t)}{n}(1+o(1))\}.$$

Число целых чисел в интервале (EZ,EY) есть величина порядка $l(k-t)/n$. Следовательно, число слагаемых не меньше $(c_2\frac{l(k-t)}{n})^2$ для некоторой константы $c_2>0$.

Принимая это во внимание, имеем:

$$P\{Z\geq Y\}\geq\frac{n}{16l\sqrt{kt}}(c_2\frac{l(k-t)}{n})^2\cdot\exp\{-(4/9)\frac{(k-t)^2}{k^2}\frac{l(k+t)}{n}(1+o(1))\}.$$

Упрощая и принимая во внимание значение l ($l=l_1$), получаем

$$\frac{n}{16l\sqrt{kt}}(c_2\frac{l(k-t)}{n})^2=\frac{1}{16\sqrt{kt}}c_2^2\frac{l(k-t)^2}{n}\geq$$

$$\frac{1}{16k}c_2^2\frac{l(k-t)^2}{n} = c_3\frac{1}{k}\frac{c_1 nk(k-t)^2\ln m}{n(k-t)^2} = c_4\ln m.$$

Таким образом,

$$P\{Z \geq Y\} \geq c_4\exp\{-(4/9)\frac{(k-t)^2}{k^2}\frac{l_1(k+t)}{n}(1+o(1))\} \geq$$

$$\exp\{-(4/9)c_1\frac{(1+o(1))}{k^2}k(k+t)\ln m\} \geq \exp\{-c_1\ln m\} = m^{-c_1}.$$

Далее имеем:

$$EX(l) = \binom{n}{l}(1-P\{Z\geq Y\})^m \leq \binom{n}{l}\exp\{-mP\{Z\geq Y\}\}.$$

Отсюда получаем:

$$\ln EX(l) \leq \ln\binom{n}{l} - m\cdot P\{Z \geq Y\} \leq$$

$$l\ln n - m\cdot m^{-c_1} \leq c_1 n\frac{k}{(k-t)^2}\ln m\ln n - m^{1-c_1}.$$

Из условия 3 теоремы 2 вытекает, что $\ln EX(l) \to -\infty$ при $n \to \infty$. Это означает (из первого неравенства Чебышева), что с вероятностью стремящейся к 1 не существует обобщенных покрытий матриц $A \in R(n,m,k,t)$ размера l с

$$l = c_1 n\frac{k}{(k-t)^2}\ln m.$$

Теорема 2 доказана.

Литература

[1] Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко, Задачи и упражнения по курсу дискретной математики, М., Наука, 1992.

[2] Р.Г. Нигматуллин, Метод наискорейшего спуска в задачах на покрытие, Труды симпозиума по приближенным алгоритмам. Киев, май 17-22, 1969, с. 36.

[3] А.А. Сапоженко, О сложности дизъюнктивных нормальных форм, получаемых с помощью градиентного алгоритма, Дискретный анализ. Новосибирск, 1972, N 5, с. 111–116.

[4] N. Alon and J.H. Spencer, The Probabilistic Method, Wiley, 1992.

[5] D. Bertsimas and R. Vohra, Rounding algorithms for covering problems, Math. Programming, **80** (1998) 63–89.

[6] V. Chvatal, A greedy heuristic for the set-covering problem, Mathematics of Operations Research, **4** (1979) 233–235.

[7] U. Feige, A threshold of $\ln n$ for the approximating set cover, Proceedings of the ACM Simposium on Theory of Computing, 1996, pp. 314-318.

[8] L.R. Ford, D.R. Fulkerson, Flows in Networks, Princeton Univ. Press, 1962.

[9] M.R. Garey and D.S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness, Freeman, New York, 1979.

[10] D.S. Johnson, Approximation algorithms for combinatorial problems, J. Comput. System Sci., **9** (1974) 256-278.

[11] R.M. Karp, Reducibility among combinatorial problems, in, Complexity of Computer Computations (R.E. Miller and J.W. Tatcher, Eds.), Plenum, New York, 1972, 85–103.

[12] L. Lovasz, On the ratio of optimal integral and fractional covers, Discrete Math. **13** (1975) 383-390.

[13] P. Raghavan and C.D. Tompson, Randomized rounding: a technique for provably good algorithms and algorithmic proofs, Combinatorica, **37** (1987) 365–374.

[14] P. Slavik, A tight analysis of the greedy algorithm for set cover, J. Algorithms, **25** (1997) 237-254.

[15] A. Srinivasan, Improved approximations of packing and covering problems, SIAM J Comput., **29** (1999) 648-670.