Вероятностный анализ различных шельфовых алгоритмов упаковки прямоугольников в полосу[1]

Н.Н. Кузюрин, А.И. Поспелов, {nnkuz,ap}@ispras.ru

ИСП РАН, 109004, Москва, Б.Коммунистическая, 25

Аннотация. Рассматривается задача упаковки множества прямоугольников в вертикальную полосу (strip packing problem). Изучается важный подкласс онлайновых алгоритмов для этой задачи – так называемые шельфовые алгоритмы. Предложен общий метод вероятностного анализа шельфовых алгоритмов, позволяющий для многих шельфовых алгоритмов оценивать математическое ожидание незаполненной площади, в предположении, что высота и ширина каждого прямоугольника являются случайными величинами.

1. Введение

В задаче упаковки в полосу (strip packing) цель состоит в упаковке множества прямоугольников в вертикальную полосу единичной ширины так, что стороны прямоугольников должны быть параллельны сторонам полосы (вращения запрещены). При анализе по худшему случаю обычно минимизируют необходимую для упаковки высоту полосы, а при анализе в среднем — математическое ожидание незаполненной площади (от нижней границы прямоугольников в упаковке до верхней) [8, 3]. Эта задача возникает во многих контекстах и имеет много приложений, в частности, при разработке СБИС, построении оптимальных расписаний для кластеров и т.д. Ее частными случаями являются задача упаковки в контейнеры (bin packing) и задача об m-процессорном расписании.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 05-01-00798.

При анализе on-line версии задачи упаковки в полосу в [1] были введены так называемые шельфовые алгоритмы. Упаковка состоит из серии слоёв (шельфов). Высоты слоёв выбираются из множества $\{r_n\}$, где $r_n = (1-\delta)^n$, δ — некоторый параметр, $0 < \delta < 1$. Прямоугольники упаковываются в минимальные по высоте шельфы, в которые они входят, т.е. если высота прямоугольника h_i, упаковываем его в шельфы высоты r_n, такой что $r_{n+1} < h_i \leq r_n$. Упаковка в слои заданной ширины и порождение новых шельфов осуществляется некоторой одномерной эвристикой упаковки в контейнеры.

Мы будем называть алгоритмом **A(E)** шельфовый алгоритм упаковки, который на втором этапе использует некоторую произвольную эвристику **E**. Цель работы состоит в описании общего метода вероятностного анализа шельфовых алгоритмов **A(E)**, позволяющего для многих шельфовых алгоритмов оценивать ожидаемую незаполненную площадь, используя соответствующие результаты для одномерной эвристики **E**.

Мы будем рассматривать вероятностное распределение $\mathrm{U}([0,1])$ — равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Всюду в дальнейшем будем считать, что для каждого прямоугольника высота h_i и ширина w_i имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Будем предполагать, что все случайные величины w_i, h_i — независимы в совокупности. В дальнейшем будем обозначать через Σ математическое ожидание площади, не заполненной прямоугольниками, между основанием полосы и верхней границей самого верхнего шельфа. Будем предполагать, что число прямоугольников N — бесконечно большая величина ($N \to \infty$). Отметим, что вероятностному анализу различных эвристик одно и двумерной упаковки посвящено много работ [2, 3, 4, 5, 6, 7].

Пусть для одномерной эвристики **E** выполнено следующее соотношение для математического ожидания разности

$$\mathbb{E}\left(L - \sum_{i=1}^{N} w_i\right) = O\left(f(N)\right),$$

где L — число шельфов, в которые эвристика **E** упаковывает набор отрезков $\{w_i\}$.

Теорема 1. *Пусть для* **E** *выполнено соотношение:* $f(N) = N^\alpha \log^\beta N$, *где* $0 < \alpha < 1$, $\beta \geq 0$. *Тогда для алгоритма* **A(E)** *справедлива следующая оценка:*

$$\Sigma = O\left(N^\alpha \left(\frac{\log^\beta N}{\delta^{1-\alpha}} + \delta N^{1-\alpha}\right)\right).$$

Выбирая $\delta = N^{(\alpha-1)/(2-\alpha)} \log^{(\beta/(2-\alpha))} N$, *получаем оценку*

$$\Sigma = O\left(N^{1/(2-\alpha)} \log^{(\beta/(2-\alpha))} N\right).$$

Отметим, в частности, что для трех важных эвристик упаковки в контейнеры известно: для First Fit (FF): $f(N) = N^{2/3}$, для Best Fit (BF): $f(N) = N^{1/2}(\log N)^{3/4}$, и для наилучшей онлайновой эвристики (best on-line) BO: $f(N) = (N \log N)^{1/2}$ [5]. Поэтому из теоремы сразу вытекает, что для шельфового алгоритма **A(FF)** $\Sigma = O(N^{3/4})$, для **A(BF)** $\Sigma = O(N^{2/3}(\log N)^{1/2})$ [9], для **A(BO)** $\Sigma = O(N^{2/3}(\log N)^{1/3})$. Первые два соотношения дают ответ на вопрос из [6].

Известно, что если отказаться от требования, чтобы алгоритм работал в режиме on-line, то, как показано в [3], можно достичь оценки средней величины незаполненной площади $\Sigma = O\left(N^{1/2} \log N\right)$. Открытым вопросом является достижимость подобной оценки в классе on-line алгоритмов.

Мы показываем, что в классе шельфовых алгоритмов (которые образуют важный подкласс онлайновых алгоритмов) такой оценки достичь невозможно. Более точно справедлива следующая

Теорема 2. *Для любого шельфового алгоритма с произвольной одномерной эвристикой упаковки в контейнеры при распределении* w_i *и* h_i *по закону* $\mathrm{U}([0,1])$ *справедлива следующая оценка:*

при $N\delta \to \infty$

$$\Sigma = \Omega\left(\frac{N^{1/2}}{\delta^{1/2}} + \delta N\right),$$

при $\delta^{-1} = \Omega(N)$

$$\Sigma = \Omega(N).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что в классе шельфовых алгоритмов нельзя по порядку улучшить оценку

$$\Sigma = O\left(N^{2/3}\right).$$

2. Доказательство теоремы 1

Пусть зафиксированы N — число прямоугольников, и $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ — высоты шельфов. Каждый i-й прямоугольник определён своей высотой h_i и шириной w_i, которые являются независимыми в совокупности случайными величинами. Для краткости будем обозначать через $\mathbf{h}$ набор $(h_1, \dots h_N)$, а через $\mathbf{w}$ — набор $(w_1, \dots w_N)$. Пусть N_n обозначает число прямоугольников, попавших в шельфы высоты r_n, т.е.

$$N_n = \#\{h_i | r_{n+1} < h_i \leq r_n\}.$$

Заметим, что случайная величина N_n не зависит от $\mathbf{w}$, а зависит только от $\mathbf{h}$.

Пусть $\{w_i^n, h_i^n\}_{i=1}^{N_n}$ — набор прямоугольников, упакованных в шельфы высоты r_n. Так как h_i имеет равномерное распределение то случайная величина N_n имеет биномиальное распределение, такое что $P\{N_n = k\} = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$, где $p = r_n - r_{n+1}$, $0 \leq k \leq N$. Пусть S_n — число шельфов высоты r_n, образовавшихся в процессе упаковки.

Используя для условного математического ожидания $\mathbb{E}(X|Y)$ равенство $\mathbb{E}\, X = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$, оценим ожидаемую пустую площадь:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} r_n S_n - \sum_{i=1}^{N} w_i h_i\right] = \mathbb{E} \sum_{n=0}^{\infty} r_n S_n - \frac{N}{4} = \mathbb{E} \sum_{n=0}^{\infty} r_n\, \mathbb{E}\left(S_n \,|\, \mathbf{h}\right) - \frac{N}{4}. \quad (1)$$

Учитывая предположение теоремы об используемой эвристике и оценке для нее математического ожидания незаполненной площади, получаем:

$$\mathbb{E}\left((S_n - \sum_{i=1}^{N_n} w_i^n) \middle| \mathbf{h}\right) = O\left(N_n^\alpha \log^\beta N_n\right).$$

Откуда, ввиду независимости w_i^n от $\mathbf{h}$, получаем оценку для числа шельфов

$$\mathbb{E}\,(S_n|\mathbf{h}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_n} w_i^n \,\middle|\, \mathbf{h}\right) + O\left(N_n^\alpha \log^\beta N_n\right) = \frac{N_n}{2} + O\left(N_n^\alpha \log^\beta N_n\right).$$

Используя это соотношение, получим, что математическое ожидание пустой площади равно

$$\mathbb{E}\sum_{n=0}^{\infty} r_n\,\mathbb{E}\,(S_n\,|\,\mathbf{h}) - \frac{N}{4} = \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\infty} r_n\left[\frac{N_n}{2} + O\left(N_n^\alpha \log^\beta N_n\right)\right] - \frac{N}{4} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[r_n\frac{N(r_n - r_{n+1})}{2} + \mathbb{E}\,r_n O\left(N_n^\alpha \log^\beta N_n\right)\right] - \frac{N}{4} = \Sigma.$$

В последнем равенстве мы использовали очевидное соотношение: $\mathbb{E}\,N_n = N(r_n - r_{n+1})$. Учитывая, что $r_n = (1-\delta)^n$, $0 < \delta < 1$, получаем для некоторой константы $c > 0$:

$$\Sigma \le c\log^\beta N\sum_{n=0}^{\infty}(1-\delta)^n\,\mathbb{E}\,N_n^\alpha + \frac{N}{2(2-\delta)} - \frac{N}{4}. \tag{2}$$

Для получения верхней оценки воспользуемся неравенством Йенсена

$$\mathbb{E}\,N_n^\alpha \le (\mathbb{E}\,N_n)^\alpha.$$

Поскольку $p = r_n - r_{n+1} = (1-\delta)^n\delta$ и $\mathbb{E}\,N_n = Np$, то $\mathbb{E}(N_n)^\alpha \le (Np)^\alpha$.

Тогда оценим сумму в (2), обозначив ее через Σ_1.

$$\Sigma_1 \le \sum_{n=0}^{\infty}(1-\delta)^n\,\mathbb{E}\,N^\alpha \le \sum_{n=0}^{\infty}(1-\delta)^n(N(1-\delta)^n\delta)^\alpha.$$

Далее, имеем

$$\Sigma_1 \le \sum_{n=0}^{\infty}(1-\delta)^n(N(1-\delta)^n\delta)^\alpha \le \sum_{n=0}^{\infty}(1-\delta)^n(N(1-\delta)^n\delta)^\alpha =$$

$$= \frac{(N\delta)^\alpha}{1-(1-\delta)^{\alpha+1}}.$$

Таким образом, получаем оценку для Σ.

$$\Sigma \le c\log^\beta(N)\frac{(N\delta)^\alpha}{1-(1-\delta)^{\alpha+1}} + \frac{N}{2(2-\delta)} - \frac{N}{4} \le$$

$$N^\alpha\left(\log^\beta(N)\frac{c\delta^\alpha}{1-(1-\delta)^{\alpha+1}} + \frac{\delta N^{1-\alpha}}{4}\right) \le N^\alpha\left(\frac{c\log^\beta(N)}{\delta^{1-\alpha}} + \frac{\delta N^{1-\alpha}}{4}\right).$$

Выбирая $\delta = N^{(\alpha-1)/(2-\alpha)}\log^{(\beta/(2-\alpha))} N$, получаем оценку

$$\Sigma = O\left(N^{1/(2-\alpha)}\log^{(\beta/(2-\alpha))}\right).$$

3. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим произвольный шельфовый алгоритм упаковки. Будем использовать те же обозначения, что и в доказательстве теоремы 1. Пусть S_n — число шельфов высоты r_n, образовавшихся в процессе упаковки рассматриваемым шельфовым алгоритмом.

Используя известную оценку для оптимального алгоритма заполнения одномерного контейнера (см. [6]), получаем:

$$\mathbb{E}\left((S_n - \sum_{i=1}^{N_n} w_i^n)\,\middle|\,\mathbf{h}\right) = \Omega\left(\sqrt{N}\right).$$

Откуда, ввиду независимости w_i^n от $\mathbf{h}$, получаем оценку для числа шельфов

$$\mathbb{E}\,(S_n|\mathbf{h}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_n} w_i^n \,\middle|\, \mathbf{h}\right) + \Omega\left(\sqrt{N}\right) = \frac{N_n}{2} + \Omega\left(\sqrt{N}\right).$$

Подставляя это выражение в равенство (1), получим, что математическое ожидание пустой площади равно

$$\mathbb{E}\sum_{n=0}^{\infty} r_n\,\mathbb{E}\,(S_n\,|\,\mathbf{h}) - \frac{N}{4} = \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\infty} r_n\left[\frac{N_n}{2} + \Omega\left(\sqrt{N}\right)\right] - \frac{N}{4} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[r_n\frac{N(r_n - r_{n+1})}{2} + \mathbb{E}\,r_n\Omega\left(\sqrt{N}\right)\right] - \frac{N}{4} = \Sigma$$

В последнем равенстве мы использовали очевидное соотношение: $\mathbb{E}\, N_n = N(r_n - r_{n+1})$. Учитывая, что $r_n = (1-\delta)^n$, $0 < \delta < 1$, получаем:

$$\Sigma = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\delta)^n \, \mathbb{E}\, \Omega\left(\sqrt{N}\right) + \frac{N}{2(2-\delta)} - \frac{N}{4}.$$

Получим теперь оценку снизу. Имеем (учитывая только первую сумму):

$$\Sigma \geq \sum_{n=0}^{\infty} (1-\delta)^n \sum_{k\colon |k-Np| \leq 2 \ln Np\sqrt{Np}} k^{1/2} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \geq$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty} (1-\delta)^n (Np - 2\ln Np\sqrt{Np})^{1/2} \sum_{k\colon |k-Np| \leq 2 \ln Np\sqrt{Np}} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

Используем известное неравенство для вероятностей больших уклонений [12]: для любого $0 < a < 1$

$$\sum_{k\colon |k-Np| > Npa} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \leq 2e^{-Npa^2/3}. \tag{3}$$

Пусть C_0 больший из двух корней уравнения

$$\sqrt{C} = 4 \ln C.$$

Тогда, если $Np > C_0$, то

$$2e^{-\ln^2 Np} < \frac{1}{2},$$

$$Np - 2\ln Np\sqrt{Np} > \frac{1}{2} Np.$$

Выбрав $a = \frac{2\ln Np}{\sqrt{Np}}$, получим:

$$\sum_{k\colon |k-Np| \leq 2 \ln Np\sqrt{Np}} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} =$$

$$= 1 - \sum_{k\colon |k-Np| > 2 \ln Np\sqrt{Np}} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \geq 1 - 2e^{-\ln^2 Np}.$$

Используя полученные неравенства и вспоминая, что $p = \delta(1-\delta)^n$, получаем для некоторой константы $c' > 0$:

$$\Sigma \geq c' \sum_{\{n|\ Np > C_0\}} (1-\delta)^n (Np)^{1/2} = c'(N\delta)^{1/2} \sum_{\{n|\ Np > C_0\}} (1-\delta)^{(3/2)n}.$$

Условие $Np > C_0$ равносильно следующему условию на n

$$n \leq \frac{\ln N\delta - \ln C_0}{-\ln(1-\delta)}.$$

Обозначая $\left[\frac{\ln N\delta - \ln C_0}{-\ln(1-\delta)}\right]$ через K и преобразуя сумму, получим

$$\Sigma \;\geq\; c'(N\delta)^{1/2} \sum_{n=0}^{K} (1 - \delta)^{(3/2)n} \;\geq\; c'(N\delta)^{1/2} \frac{1 - (1-\delta)^{3/2\left(\frac{\ln N\delta - \ln C_0}{-\ln(1-\delta)}\right)}}{1 - (1-\delta)^{3/2}}.$$

Далее имеем:

$$\Sigma \geq c'(N\delta)^{3/2} \frac{1 - (1-\delta)^{3/2\left(\frac{\ln N\delta - \ln C_0}{-\ln(1-\delta)}\right)}}{1 - (1-\delta)^{3/2}} \geq c'(N\delta)^{1/2} \frac{1 - \left(\frac{\ln C_0}{\ln N\delta}\right)^{3/2}}{1-(1-\delta)^{3/2}} \geq$$

$$\geq c' \frac{N^{1/2}}{\delta^{1/2}} \left(1 - \left(\frac{\ln C_0}{\ln N\delta}\right)^{3/2}\right).$$

При $N\delta \to \infty$ имеем

$$\Sigma = \Omega\left(\frac{N^{1/2}}{\delta^{1/2}}\right).$$

Для оставшейся части суммы справедливо неравенство:

$$\frac{N}{2}\left(\frac{1}{2-\delta} - \frac{1}{2}\right) = \frac{N}{4}\left(\frac{\delta}{2-\delta}\right) \geq \frac{N}{8}\delta.$$

Таким образом, получаем общую нижнюю оценку:

$$\Sigma = \Omega\left(\frac{N^{1/2}}{\delta^{1/2}} + \delta N\right).$$

Нетрудно проверить, что минимум достигается при $\delta = N^{-1/3}$, что дает нижнюю оценку

$$\Sigma = \Omega\left(N^{2/3}\right).$$

Осталось рассмотреть случай $\delta^{-1} = \Omega(N)$. Имеем для некоторой константы $c > 0$:

$$\Sigma \geq c \sum_{n=0}^{\infty} (1-\delta)^n \, \mathbb{E} N_n^{1/2} \geq c \sum_{n=0}^{1/\delta} (1-\delta)^{1/\delta} \sum_{k=1}^{N} k^{1/2} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \geq$$

$$\geq ce^{-1} N\delta \sum_{n=0}^{1/\delta} (1-\delta)^n (1-\delta(1-\delta)^n)^{N-1} \geq$$

$$\geq ce^{-1} (1-\delta)^{1/\delta} N\delta \sum_{n=0}^{1/\delta} (1-\delta)^{N-1} \geq ce^{-2} N (1-\delta)^{N-1} = \Omega(N).$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

Литература

[1] B.S. Baker, J.S. Schwartz, Shelf algorithms for two dimensional packing problems. SIAM J. Computing, (1983) **12**, 508–525 18

[2] E.G. Coffman, Jr., C. Courcoubetis, M.R. Garey, D.S. Johnson, P.W. Shor, R.R. Weber, M. Yannakakis, Perfect packing theorems and the average-case bahavior of optimal and online bin packing, SIAM Review, (2002) **44** (1), 95–108. 18

[3] R.M. Karp, M. Luby, A. Marchetti-Spaccamela, A probabilistic analysis of multidimensional bin packing problems, In: Proc. Annu. ACM Symp. on Theorty of Computing, 1984, pp. 289–298. 17, 18, 19

[4] P. W. Shor, The average-case analysis of some on-line algorithms for bin packing. Combinatorica (1986) **6**, 179-200. 18

[5] P. W. Shor, How to pack better than Best Fit: Tight bounds for average-case on-line bin packing, Proc. 32nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, (1991) pp. 752-759. 18, 19

[6] E. G. Coffman, Jr., D. S. Johnson, P. W. Shor and G. S. Lueker. Probabilistic analysis of packing and related partitioning problems, Statistical Science (1993) **8**, 40-47. 18, 19, 22

[7] E. G. Coffman, Jr., P. W. Shor. Packings in two dimensions: Asymptotic average-case analysis of algorithms, Algorithmica (1993) **9**, 253-277. 18

[8] J. Csirik, G.J. Woeginger, Shelf Algorithms for On-Line Strip Packing. Inf. Process. Lett. (1997), **63**(4), 171-175. 17

[9] Кузюрин Н.Н., Поспелов А.И., Вероятностный анализ шельфовых алгоритмов упаковки прямоугольников в полосу, Дискретная математика, 2006, т. 18, N 1, с. 76–90. 19

[10] J. Csirik, D.S. Johnson, C. Kenyon, J.B. Orlin, P.W. Shor, R.R. Weber, On the Sum-of-Squares Algorithm for Bin Packing, Proc. Annu. ACM Symp. on Theory of Computing, Portland, Oregon, May 21-23, 2000, pp. 208-217.

[11] C. Kenyon and E. Remila, A near optimal solution to a two-dimensional cutting stock problem, Mathematics of Operations Research, (2000) **25**, 645–656.

[12] R. Motwani and P. Raghavan, Randomized algorithms, Cambridge Univ. Press, 1995. 23

[13] Ee-Chien Chang, W. Wang, M.S. Kankanhalli, Multidimensional on-line bin-packing: An algorithm and its average-case analysis, Information Processing Letters, **48**, 1993, 121-125.