

Высокопроизводительное численное моделирование стратифицированных течений около клина в OpenFOAM

^{1,2}Н.Ф. Димитриева < dimitrieva@list.ru >

¹Ю.Д. Чашечкин < chakin@ipmnet.ru >

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Россия, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1

² Институт гидромеханики НАНУ, 03680, Украина, г. Киев, ул. Желябова, д. 8/4

Аннотация. Представлены результаты численного моделирования течений непрерывно стратифицированной жидкости, которые характеризуются широким диапазоном значений внутренних масштабов, отсутствующих в однородной жидкости. Поставленная задача решалась с использованием метода конечных объемов в открытом пакете OpenFOAM. Тестирование разработанной модели проводилось для течений непрерывно стратифицированных жидкостей около неподвижного и движущегося клиновидного тела с прямыми и искривленными гранями. Расчеты, проведенные с использованием вычислительных ресурсов web-лаборатории UniHUB, показали сложную структуру течений, включающую высокоградиентные прослойки около неподвижного препятствия и присоединенные внутренние волны вблизи острых кромок движущегося препятствия.

Ключевые слова: численное моделирование; открытые вычислительные пакеты; стратифицированные течения, тонкая структура.

DOI: 10.15514/ISPRAS-2016-28(1)-12

Для цитирования: Димитриева Н.Ф., Чашечкин Ю.Д. Высокопроизводительное численное моделирование стратифицированных течений около клина в OpenFOAM. Труды ИСП РАН, том 28, вып. 1, 2016 г., с. 207-220. DOI: 10.15514/ISPRAS-2016-28(1)-12

1. Введение

Одной из наиболее актуальных научных проблем является построение и численная реализация полных моделей механики неоднородных сред, описывающих природные процессы, протекающие в окружающей среде и промышленных аппаратах, которые допускают прямое сравнение с экспериментом. Расчет и измерения всех макро- и микрокомпонент течений

представляют сложные задачи, все еще не решенные с практически необходимой степенью точности.

В настоящей работе представлены результаты расчета течений, индуцированных диффузией на неподвижном непроницаемом препятствии в непрерывно стратифицированной жидкости и возмущений около движущегося тела, которые активно изучаются последние семьдесят лет [1-3]. Они возникают в результате прерывания молекулярного потока стратифицирующей примеси на границах произвольной формы, увлечения жидкости и деформации равновесного поля плотности. В силу внутренней многомасштабности впервые полный расчет такого течения даже на простой топографии (пластина конечной длины) на основе фундаментальной системы уравнений [4] удалось выполнить только с применением суперкомпьютерных технологий [5].

Современные методы распараллеливания численных алгоритмов позволяют проводить вычисления на кластерных установках за вполне приемлемое время с использованием высокой пространственной дискретизации расчетной области. Применение высокопроизводительных вычислительных систем дает возможность более точно описать тонкоструктурные компоненты течений, проводить широкий параметрический анализ поставленных задач, а также допускать сравнение с данными лабораторных экспериментов и наблюдений в природных условиях [3, 6].

2. Постановка задачи

В данной работе решается нестационарная плоская задача формирования течений непрерывно стратифицированных жидкостей около неподвижного и движущегося клиновидного тела.

Математическое описание изучаемых физических процессов проводится на основе фундаментальной системы дифференциальных балансных уравнений механики неоднородных многокомпонентных жидкостей. В систему входят уравнения, выражающие в дифференциальной форме законы сохранения наблюдаемых физических величин – массы, импульса и вещества, а также замыкающее уравнение состояния [3, 4]. В традиционном приближении Буссинеска, когда малые изменения плотности на масштабах задачи учитываются только в членах с силой тяжести, система определяющих уравнений принимает вид

$$\rho = \rho_{00} \left(\exp(-y/\Lambda) + s \right); \quad (1)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = \kappa_s \Delta s + \frac{v_y}{\Lambda}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_{00}} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} - s \mathbf{g}. \quad (4)$$

Здесь $S = S_0(y) + s$ – полная соленость, S – ее возмущенная составляющая, ρ_{00} – плотность на нулевом уровне (горизонте нейтральной плавучести), $\rho(y)$ – невозмущенное распределение плотности, которое задается профилем солености $S_0(y)$, где ось y направлена вертикально вверх, \mathbf{v} – вектор скорости жидкости, P – давление за вычетом гидростатического, ν – коэффициент кинематической вязкости, κ_s – коэффициент диффузии соли, t – время, \mathbf{g} – ускорение свободного падения, ∇ и Δ – операторы Гамильтона и Лапласа, $\Lambda = (d \ln \rho_0 / dy)^{-1}$ – длина плавучести, $N = \sqrt{g / \Lambda}$ – частота плавучести. Теоретико-групповой анализ системы (1-4) показал ее соответствие базовым принципам физики, положенным в основу вывода определяющих уравнений, в отличие от многих распространенных конститутивных или редуцированных систем [7].

В начальный момент времени $t=0$ в покоящуюся непрерывно стратифицированную жидкость помещается непроницаемое препятствие, на поверхности которого задается условие прилипания для скорости и непротекания для вещества:

$$\mathbf{v}, s|_{t \leq 0} = 0, \quad v_{x,y}|_{\Sigma} = 0, \quad \mathbf{v}, s|_{x,y \rightarrow \infty} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial n}|_{\Sigma} = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial s}{\partial n}|_{\Sigma} = 0, \quad (6)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности препятствия Σ . На большом удалении от препятствия задаются условия затухания всех возмущений.

Граничные условия (5) описывают течения, индуцированные диффузией на неподвижном препятствии [8]. Установившееся поля физических переменных такого течения служат начальными условиями для задачи обтекания препятствия потоком непрерывно стратифицированной жидкости, когда на удалении от препятствия задается невозмущенный поток [9]:

$$v_x|_{x,y \rightarrow \infty} = U, \quad v_y|_{x,y \rightarrow \infty} = 0. \quad (7)$$

Адекватность выбранной математической модели подтверждается соответствием основополагающим принципам механики и согласованностью независимых аналитических, численных и экспериментальных исследований стратифицированных течений около пластины и полуплоскости [3, 9, 10].

3. Масштабный анализ

Масштабный анализ задачи играет важную роль при разработке методики численного эксперимента: макромасштабы характеризуют размер области решения задачи, которая должна содержать все изучаемые компоненты течения, а микромасштабы – пространственное разрешение расчетной сетки.

Ранее выполненный анализ свойств линеаризованных фундаментальных уравнений и результаты лабораторного моделирования показывают, что все компоненты полного решения, как регулярно возмущенные, которые характеризуют волны и вихри, так и обширное семейство сингулярно возмущенных, описывающих сопутствующие тонкоструктурные элементы течений, проявляются в широком диапазоне параметров [3, 10].

Размерные параметры задачи формируют характерные масштабы: времени ($T_b = 2\pi/N$), скорости ($U_N^v = \sqrt{\nu N}$, $U_N^{\kappa_s} = \sqrt{\kappa_s N}$, U), а также длины.

Большие линейные масштабы характеризуют исходную стратификацию (длину плавучести Λ) и геометрию течения (размер препятствия L). Скорость источника U задает длину гравитационных поверхностных волн $\lambda_s = 2\pi U^2/g$ и внутренних $\lambda_i = UT_b$ гравитационных волн.

Микромасштабы диссипативной природы (вязкий $\delta_N^v = \sqrt{\nu/N}$ и диффузионный $\delta_N^{\kappa_s} = \sqrt{\kappa_s/N}$ микромасштабы) определяют поперечные размеры тонкоструктурных компонентов. Компоненты структур с масштабами Прандтля $\delta_U^v = \nu/U$ и $\delta_U^{\kappa_s} = \kappa_s/U$ выражены в струях и следах. Широкий диапазон значений масштабов длины (4-6 порядков) указывают на сложность внутренней структуры стратифицированного течения, которую необходимо учитывать при разработке программ.

Волны и вихри в неоднородных средах существуют одновременно и активно взаимодействуют между собой наряду с формирующейся тонкой структурой, которая влияет на перенос вещества, процессы разделения компонент течений, а также повышения локальной концентрации примеси. Основное достоинство рассмотренной постановки задачи в том, что она позволяет одновременно изучать все элементы течений в рамках единого описания в естественных физических переменных без привлечения дополнительных констант и связей.

4. Метод решения

Численные методы позволяют преодолеть трудности, возникающие при построении точных аналитических решений, учесть сложность геометрии задачи и подробно изучить структуру и динамику нестационарных течений в полной нелинейной постановке и естественных переменных без привлечения дополнительных ограничивающих приближений.

Численное решение поставленной задачи строится методом конечных объемов в открытом пакете OpenFOAM (Open Source Field Operation And Manipulation) с использованием объектно-ориентированного языка программирования C++. Выбор OpenFOAM обоснован открытостью его исходного кода, что существенно упрощает и ускоряет разработку собственных численных моделей. Анализ имеющегося инструментария пакета показал отсутствие готовых решений системы фундаментальных уравнений (1-4) и необходимость создания собственной численной модели. Для учета эффектов стратификации и диффузии стандартный решатель isoFoam, моделирующий нестационарные течения однородной жидкости, был дополнен новыми переменными (ρ и S) и соответствующими уравнениями (1, 3), а также новыми вспомогательными параметрами (N , L , κ_s , \mathbf{g} и др.) [10].

Граничное условие возмущения солености (6) реализовано с помощью расширенной утилиты funkySetBoundaryField, которая позволяет задавать аналитические выражения для физических переменных. На передней и задней поверхностях задавалось граничное условие empty с целью исключения расчета в третьем измерении для плоской задачи.

Дискретизация расчетной области осуществлялась в открытой интегрируемой платформе SALOME. Простота геометрии позволяет построить блочно-структурированную гексаэдральную расчетную сетку с совмещением линий на границах блоков. Процедура построения была параметризована с целью сокращения временных затрат на перестройку сетки при изменении геометрических параметров расчетной области. Проведенные тестовые расчеты с различным измельчением сетки подтвердили необходимость разрешения минимальных масштабов задачи [11].

Вычисления проводились в параллельном режиме с привлечением ресурсов web-лаборатории UniHUB (www.unihub.ru) [12]. Значения входных параметров приведено в таблице 1.

Таблица 1. Значения входных параметров
Table 1. The values of input parameters

№	Обозначение	Описание	Значение
1	ρ_{00}	плотность на нулевом уровне, кг/м ³	1020
2	ν	коэффициент кинематической вязкости, м ² /с	10^{-6}
3	κ_s	коэффициент диффузии соли, м ² /с	$1,41 \cdot 10^{-9}$
4	N	частота плавучести, с ⁻¹	1
5	L	длина клина, м	0,1
6	h	высота основания клина, м	0,02

Использование суперкомпьютерных систем допускает высокую пространственную дискретизацию расчетной области и проведение более широкого параметрического анализа задач [3, 11]. Для вычисления дополнительных физических переменных, не входящих в решатель, использовались утилиты vorticity, stressComponents, funkySetFields и др. Визуализация результатов расчетов выполнялась с использованием графических пакетов ParaView и Origin. Для преобразования цифровых данных в кодах OpenFOAM к другим форматам использовались стандартные утилиты sample и topoSet.

5. Результаты и обсуждение

В данной работе приводятся результаты расчета течений непрерывно стратифицированных жидкостей около неподвижного и движущегося клиновидного тела с использованием предложенной методики численного моделирования.

5.1 Индуцированные диффузией течения в покоящейся стратифицированной жидкости

Устойчиво стратифицированная среда находится в состоянии покоя только когда градиенты плотности параллельны силе тяжести. Если в покоящуюся стратифицированную жидкость поместить непроницаемое тело, оно прерывает естественный молекулярный поток вещества. Это приводит к переизбытку примеси в тонком слое под препятствием (красный цвет) и его дефициту над препятствием (синий), как показано на рис. 1. Таким образом формируются восходящие и нисходящие струйные течения вдоль сторон препятствия, компенсирующие возникающую неравновесность. Их называют течениями, индуцированными диффузией [1, 2]. К пристенным зонам примыкают области с обратным знаком возмущения солености, иллюстрирующие области дефицита и избытка стратифицирующей компоненты. При этом величина возмущения уменьшается в направлении от препятствия, а толщина слоя, наоборот, увеличивается.

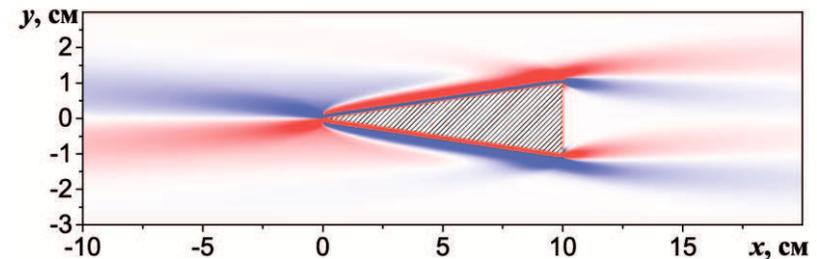


Рис. 1. Возмущение солености, индуцированной диффузией на клине
Fig. 1. Perturbation of salinity induced by diffusion on a wedge

Важную роль играют краевые эффекты, где схождение с острых кромок клиновидного препятствия тонких струйных течений жидкости, формирующихся вдоль каждой из его сторон, порождает внутренние волны. Обычно тонкоструктурные эффекты вносят небольшие поправки в значения характеристик течений, но их действие усиливается большой величиной градиентов солености, поля которых отражает сложную периодическую структуру течений, индуцированных диффузией (рис. 2). Горизонтальные полосчатые структуры согласуются с экспериментальными картинками визуализации (“цветной теневой метод” с горизонтальной щелью и решеткой) распределения градиента коэффициента преломления в лабораторном бассейне для тел с другими геометрическими формами [3, 5].

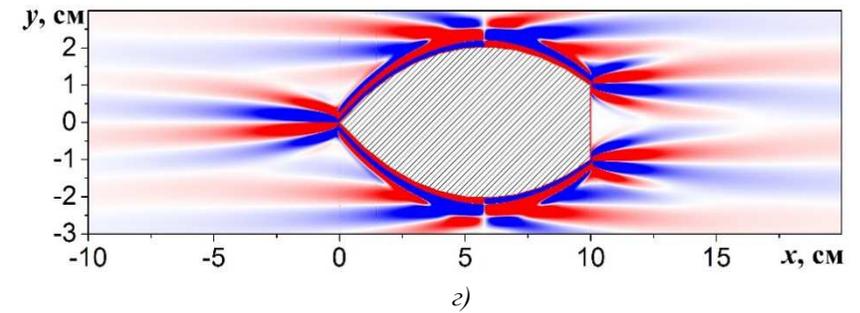
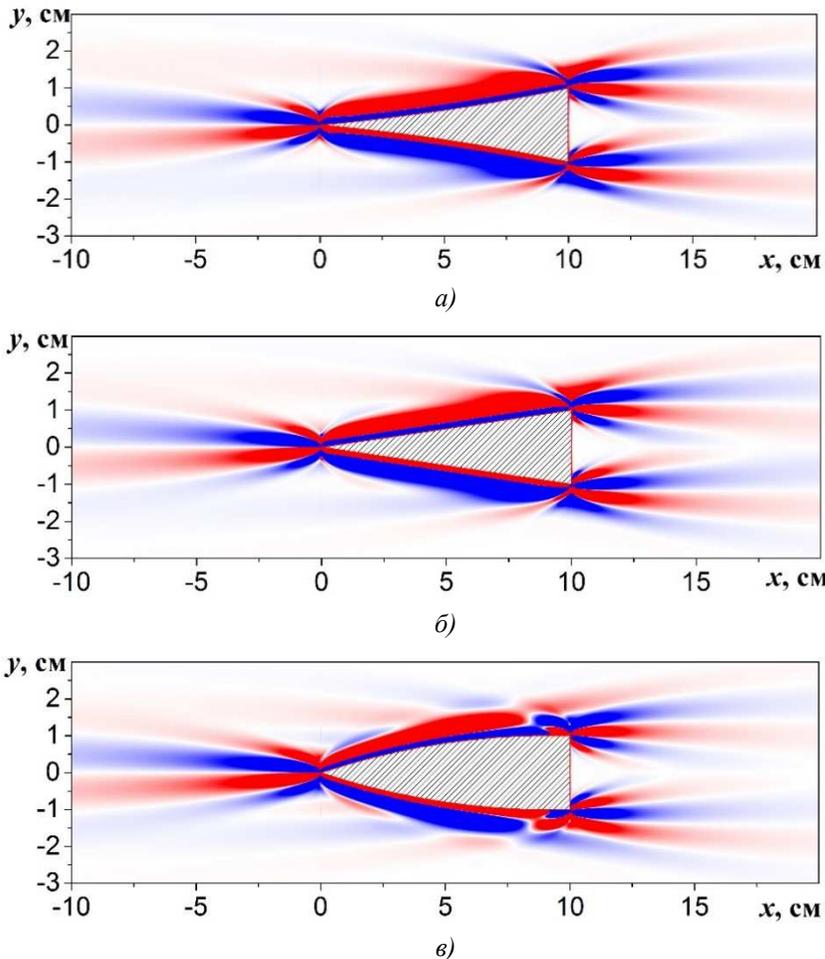


Рис. 2. Градиент возмущения солености для неподвижного клиновидного тела:

$y_0 = 4$ мм (а), $y_0 = 5$ мм (б), $y_0 = 8$ мм (в), $y_0 = 20$ мм (г)

Fig. 2. Gradient of salinity perturbation for fixed wedge-shaped body: $y_0 = 4$ mm (a), $y_0 = 5$ mm (б), $y_0 = 8$ mm (в), $y_0 = 20$ mm (г).

Общая структура изображения типична для стратифицированных течений, в которых силы плавучести подавляют вертикальное движение. Неоднородности вертикального молекулярного потока вещества, вызванные непроницаемыми препятствиями в толще жидкости или наклоном ее границ, создают горизонтальные градиенты плотности, которые образуют течения даже при отсутствии дополнительных силовых факторов и вызывают самодвижение тел свободных тел нейтральной плавучести.

С целью изучения влияния формы препятствия на структуру течений, индуцированных диффузией, рассматривались клинья с прямыми и искривленными гранями симметрично относительно продольной оси x . Искривление боковой грани получено путем проведения дуги окружности через три точки. В центральной точке при $x = 50$ мм см для клина с прямой гранью $y_0 = 5$ мм (рис. 2, б), для вогнутого клина $y_0 < 5$ мм (рис. 2, а), для выпуклого $y_0 > 5$ мм (рис. 2, в, г).

Около угловых точек клина формируются дополнительные тонкоструктурные компоненты. Чем острее экстремальная вершина, тем ярче выражены визуализируемые пучки знакопеременных полос (рис. 2, а). Для выпуклого клина (рис. 2, в), у которого угол между основанием и боковой гранью приближается к 90° , пучок тонкоструктурных элементов расплывается от вершины вдоль грани. Принципиально меняется картина течения, если сторону клина изогнуть таким образом, что экстремальная точка смещается от вершины к точке на грани (рис. 2, г). В этом случае визуализируемые структуры подобны теневым картинкам течений, индуцированных диффузией на цилиндре [6].

Течения, индуцированные диффузией на клиновидном препятствии, представляют научный и практический интерес в связи с возникновением ненулевой интегральной силы, приводящий к самодвижению. При экспериментальных и теоретических исследованиях погруженных в

стратифицированную жидкость тел нейтральной плавучести, симметричных относительно линии действия силы тяжести (пластина, цилиндр и т.п.), эта отличительная особенность не была обнаружена [3, 5].

Анализ структуры поля давления выявил протяженную область отрицательного давления у острой вершины клиновидного препятствия [8]. Разность давлений – подпор у основания и дефицит перед клином объясняет возникновение интегральной силы, толкающей горизонтальный клин в направлении его вершины. Экспериментальные исследования [13] подтвердили возможность самодвижения клиновидного тела в устойчиво стратифицированной жидкости.

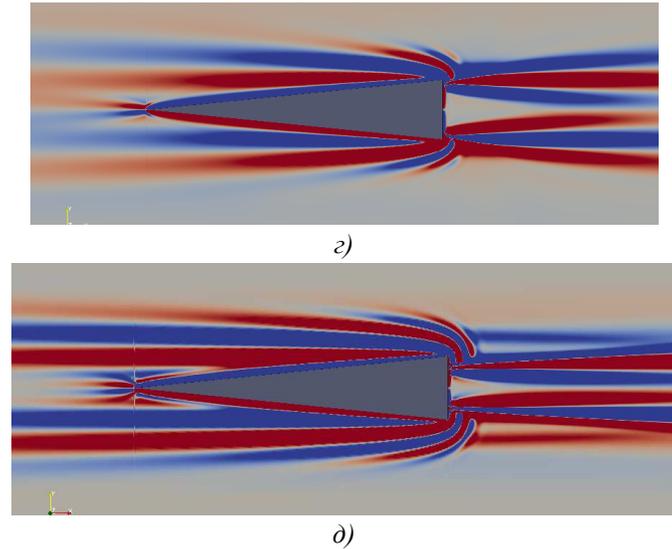
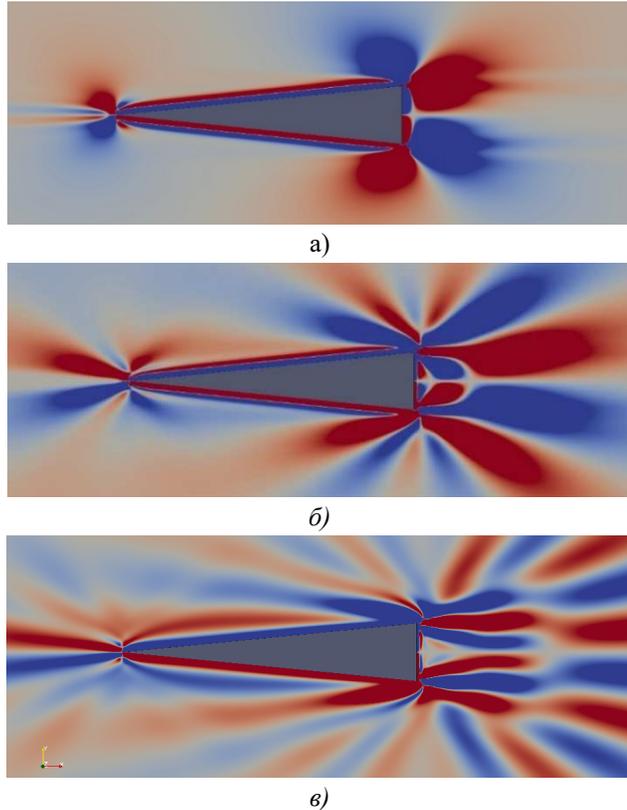


Рис. 3. Эволюция поля градиента возмущения солености при движении клина со скоростью $U = 10^{-4}$ м/с: (а - д) $\tau = t / T_b = 0,3, 1,1, 3,2, 7,9, 15,9$

Fig. 3. Evolution of the field of the salinity perturbation gradient when the wedge moves with velocity $U = 10^{-4}$ m / s (а - д), 0,3, 1,1, 3,2, 7,9, 15,9

5.2 Возмущения покоящейся стратифицированной жидкости движущимся клином

Полученные результаты расчетов индуцированного диффузией течения на неподвижном клине служат начальными условиями задачи обтекания тел внешним потоком. На рис. 3 продемонстрирована эволюция картины обтекания клина стратифицированным потоком, который начал равномерно двигаться из состояния покоя со скоростью $U = 10^{-4}$ м/с в жидкости с периодом плавучести $T_b = 6,28$ с. Начальная структура течения, индуцированного диффузией на непроницаемом клине, кардинально меняется с началом движения препятствия. В толще непрерывно стратифицированной жидкости начинают формироваться опережающие возмущения, розетки нестационарных и поля присоединенных внутренних волн, а также протяжённый след за экстремальными точками. Необходимо отметить, что заданные ненулевые начальные условия задачи обтекания клина сохраняют свое влияние на структуру течения только на начальном этапе (около $1,5T_b$). Число наблюдаемых присоединенных волн, не проникающих в спутный след позади тела растет со временем.

Сформированная картина обтекания клина (рис. 3, д) по своей структуре согласуется с результатами экспериментальных и численных исследований обтекания тел с другими геометрическими формами потоком стратифицированной жидкости [3, 6, 9, 14]. Источником внутренних волн служат краевые сингулярности, генерирующие интенсивное вертикальное вытеснение жидкости, что приводит к отклонению от изначального положения нейтральной плавучести и, как следствие, формированию периодических затухающих колебаний жидкости.

6. Заключение

Вычисления, проведенные в открытом пакете OpenFOAM с использованием суперкомпьютерных систем, показали возможность расчета многомасштабных структурированных течений на основе фундаментальной системы уравнений в широком диапазоне параметров задачи. Расчеты течений непрерывно стратифицированной жидкости около неподвижного и движущегося клиновидного тела показали высокую работоспособность предложенной численной модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-37-50382). Расчеты проводились с использованием вычислительных мощностей web-лаборатории UniHUB ИСП РАН (www.unihub.ru).

Список литературы

- [1]. Л. Прандтль. Гидроаэромеханика. М.: ИИЛ, 1949 г. 488 с.
- [2]. O. M. Phillips. On flows induced by diffusion in a stably stratified fluid. *Deep-Sea Res.*, volume 17, 1970. P. 435–443.
- [3]. Ю.Д. Чашечкин Дифференциальная механика жидкостей: согласованные аналитические, численные и лабораторные модели стратифицированных течений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, сер. «Естественные науки», № 6, 2014 г. стр. 67-95. <http://vestniken.bmstu.ru/articles/547/547.pdf>
- [4]. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика, том VI, Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [5]. Ю.Д. Чашечкин, Я.В. Загуменный Структура течения, индуцированного диффузией на наклонной пластине // Доклады Академии Наук, том 444, № 2, 2012 г. стр. 165-171. doi: 10.1134/S1028335812050047
- [6]. Yu.D. Chashechkin, V.V. Mitkin Soaring interfaces, vortices and vortex systems inside the internal waves wake past the horizontally moving cylinder in a continuously stratified fluid. *J. Visualiz.*, volume 9, issue 3, 2006. P. 301-308. doi: 10.1007/BF03181677
- [7]. В.Г. Байдулов, Ю.Д. Чашечкин Сравнительный анализ симметрий моделей механики неоднородных жидкостей // Доклады Академии Наук, том 444, № 1, 2012 г. стр. 38–41. doi: 10.1134/S1028335812050011
- [8]. Н.Ф. Димитриева, Ю.Д. Чашечкин Численное моделирование динамики и структуры индуцированного диффузией течения на клине // Вычислительная механика сплошных сред, том 8, № 1, 2015 г. стр. 102– 110. doi: 10.7242/1999-6691/2015.8.1.9

- [9]. Ю.Д. Чашечкин, Р.Н. Бардаков, Я.В. Загуменный. Расчет и визуализация тонкой структуры полей двумерных присоединенных внутренних волн, *Морской гидрофизический журнал*, № 6. 2010 г. стр. 3-15.
- [10]. Н.Ф. Димитриева, Я.В. Загуменный Численное моделирование стратифицированных течений с использованием OpenFOAM // Труды Института системного программирования РАН, том 26, № 5, 2014 г. стр. 187– 200. doi: 10.15514/ISPRAS-2014-26(5)-10
- [11]. Н.Ф. Димитриева Расчет стратифицированных течений около клина с использованием открытых вычислительных пакетов // Прикладная гидромеханика, том 17, № 2, 2015 г. стр. 26-35.
- [12]. О. Самоваров, С. Гайсарян. Архитектура и особенности реализации платформы UniHUB в модели облачных вычислений на базе открытого пакета OpenStack. Труды Института системного программирования РАН, том 26, вып. 1, 2014 г. стр. 403-420 doi: 10.15514/ISPRAS-2014-26(1)-17.
- [13]. M. J. Mercier, F. M. Ardekani, M. R. Allshouse, B. Doyle, T. Peacock. Self-propulsion of immersed object via natural convection. *Physical review letters*, volume 112, 2014. P. 204501(5). doi: 10.1103/PhysRevLett.112.204501
- [14]. Yu.D. Chashechkin, V.V. Mitkin. A visual study on flow pattern around the strip moving uniformly in a continuously stratified fluid, *J. Visualiz.*, volume 7, Issue 2, 2004. P. 127-134. doi: 10.1007/BF03181585

High-performance numerical simulation of stratified flows around a wedge in OpenFOAM

^{1,2}N.F. Dimitrieva < dimitrieva@list.ru >

¹Yu.D. Chashechkin < chakin@ipmnet.ru >

¹IPMech RAS, 119526, Russia, Moscow, 101/1 Vernadskogo Avenue

²IHM NASU, 03680, Ukraine, Kiev, 8/4 Zheliabova Street

Abstract. Results of numerical simulation of a continuously stratified fluid are presented. They are characterized by a wide range of values of internal scales that are not in a homogeneous liquid. Mathematical model is based on the fundamental set of differential equations of inhomogeneous multicomponent fluid mechanics. The problem is solved using the finite volume method in an open source package OpenFOAM. To take into account the stratification and diffusion effects a new own solver was developed and tested using the standard and extended libraries of the package. A particular attention is focused at construction of a high quality computational grid which satisfies basic requirements for resolution of all the microscales of the problem in high-gradient regions of the flow. Testing of the proposed numerical model Testing was conducted for continuously stratified fluid flows around a motionless and a moving wedge-shaped body with straight and curved edges. The calculations performed in parallel regime on computational facilities of the web-laboratory UniHUB (www.unihub.ru) demonstrated complex structure of flows. High-gradient layers near the sharp edges of the obstacles have been identified. Formation of an intensive zone of pressure depression in front of the leading vertex of the wedge is

responsible for generation of propulsive mechanism that results in a self-motion of the obstacle along its neutral buoyancy horizon in a stably stratified environment.

Keywords: numerical simulation; open source computational packages; stratified flows.

DOI: 10.15514/ISPRAS-2016-28(1)-12

For citation: Dimitrieva N.F., Chashechkin Yu.D. High-performance numerical simulation of stratified flows around a wedge in OpenFOAM. *Trudy ISP RAN /Proc. ISP RAS*, 2016, vol. 28, issue 1, pp. 207-220 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2016-28(1)-12

References

- [1]. Prandtl L. Essentials of fluid dynamics. *London: Blackie and Son Publ.*, 1952. 452 p.
- [2]. Phillips O. M. On flows induced by diffusion in a stably stratified fluid. *Deep-Sea Res.*, 1970, vol. 17, pp. 435–443.
- [3]. Chashechkin Yu. D. Differentsial'naya mekhanika zhidkostej: soglasovannye analiticheskie, chislennye i laboratornye modeli stratifitsirovannykh techenij [Fluid mechanics: consistent analytical, numerical and laboratory models of stratified flows] *Herald of the Bauman MSTU, series "Natural Science" [Vestnik MGTU im. N.E. Baumana, series "Estestvennyye nauki"]*, 2014, no 6, pp. 67-95. (in Russian) <http://vestniken.bmstu.ru/articles/547/547.pdf>
- [4]. L. D. Landau, E. M. Lifshits. Teoreticheskaya fizika, tom VI Gidrodinamika [Theoretical physics, volume VI, Hydrodynamics]. *Moscow, Nauka Publ. [Moscow: Science]*, 1986. 736 p. (in Russian)
- [5]. Chashechkin Yu.D, Zagumennyi Ya.V. Structure of Diffusion-Induced Flow on an Inclined Plate. *Doklady Physics*, 2012, vol. 57, no. 5, pp. 210–216. doi: 10.1134/S1028335812050047
- [6]. Chashechkin Yu.D., Mitkin V.V. Soaring interfaces, vortices and vortex systems inside the internal waves wake past the horizontally moving cylinder in a continuously stratified fluid. *J. Visualiz.*, 2006, vol. 9, no. 3, pp. 301-308. doi: 10.1007/BF03181677
- [7]. Baydulov V.G., Chashechkin Yu.D. Comparative analysis of symmetries for the models of mechanics of nonuniform fluids. *Doklady Physics*, 2012, vol. 57, no. 5, pp. 192–196. doi: 10.1134/S1028335812050011
- [8]. Dimitrieva N.F., Chashechkin Yu.D. Chislennoe modelirovanie dinamiki i struktury indutsirovannogo diffuziej techeniya na kline [Numerical simulation of the dynamics and structure of a diffusion-driven flow on a wedge], *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred [Computation continuum mechanics]*, 2015, vol. 8, no. 1, pp. 102– 110. (in Russian) doi: 10.7242/1999-6691/2015.8.1.9
- [9]. Chashechkin Yu. D., Bardakov R. N., Zagumennyi Ia. V. Raschet i vizualizatsiya tonkoj struktury polej dvumernykh prisoedinennykh vnutrennikh voln [Calculation and visualization of the fine structure of fields of two-dimensional attached internal waves], *Morskoj gidrofizicheskij zhurnal [Marine Hydrophysical Journal]*, 2010, no. 6, pp. 3-15. (in Russian)
- [10]. Dimitrieva N.F., Zagumennyi Ia. V. Chislennoe modelirovanie stratifitsirovannykh techeniy s ispolzovaniem OpenFOAM [Numerical simulation of stratified flows using OpenFOAM] *Trudy ISP RAN [The Proceedings of ISP RAS]*, 2014, vol. 26, no. 1, pp. 187-200. (in Russian) doi: 10.15514/ISPRAS-2014-26(5)-10

- [11]. Dimitrieva N.F. Raschet stratifitsirovannykh techenij okolo klina s ispolzovaniem otkrytykh vychislitel'nykh paketov [Calculation of stratified flows around a wedge using open software packages] *Prikladnaya gidromekhanika [Applied Hydromechanics]*, 2015, vol. 17, no. 2, pp. 26-35. (in Russian)
- [12]. O. Samovarov, S. Gaysaryan. Arkhitektura i osobennosti realizatsii platformy UniHUB v modeli oblachnykh vychislenij na baze otkrytogo paketa OpenStack [The web-laboratory architecture based on the cloud and the UniHUB implementation as an extension of the OpenStack platform]. *Trudy ISP RAN [The Proceedings of ISP RAS]*, 2014, vol. 26, no. 1, pp. 403-420. (in Russian). doi: 10.15514/ISPRAS-2014-26(1)-17
- [13]. Mercier M. J., Ardekani F. M., Allshouse M. R., Doyle B., Peacock T. Self-propulsion of immersed object via natural convection. *Physical review letters*, 2014, vol. 112, pp. 204501(5). doi: 10.1103/PhysRevLett.112.204501
- [14]. Chashechkin Yu.D., Mitkin V.V. A visual study on flow pattern around the strip moving uniformly in a continuously stratified fluid. *J. Visualiz.*, 2004, vol. 7, no. 2, pp. 127-134. doi: 10.1007/BF03181585