

# Применение спектральных методов обработки данных к результатам численного моделирования аттракторов внутренних волн

<sup>1</sup>М. Провидухина <itimasha@gmail.com>

<sup>1,2</sup>И. Сибгатуллин <sibgat@imec.msu.ru>

<sup>1</sup>Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова,  
19991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1

<sup>2</sup>Институт системного программирования РАН,  
109004, Россия, г. Москва, ул. А. Солженицына, дом 25

**Аннотация.** Проведено прямое численное моделирование распространения внутренних волн и образования волновых аттракторов в трапециевидальном контейнере, заполненном устойчиво стратифицированным раствором соли с постоянной частотой плавучести. Левая вертикальная стенка контейнера совершает монохроматические колебания в форме половины косинусоиды на высоту контейнера, правая стенка расположена под углом к вертикали и обеспечивает фокусировку внутренних волн, две другие границы горизонтальны. На верхней границе задано условие отсутствия касательных напряжений, на остальных условие прилипания. Рассчитываются уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска в трёхмерной и двумерной постановке. Прямое численное моделирование проведено с помощью метода спектральных элементов 8-го порядка и модифицированного кода nek5000. С помощью применения преобразований Гильберта и частотно-временных диаграмм к результатам численного моделирования аттракторов внутренних волн удалось получить временные и пространственные характеристики, в частности волновые векторы, соответствующие временным частотам, полученным с помощью частотно-временных диаграмм. При этом используется преобразование Гильберта с фильтрацией по узкому диапазону частот. Частотно-временные диаграммы для режимов со слабой надкритичностью показывают возникновение дочерних волн на частотах, соответствующих триадному волновому резонансу. Выполнение триадного резонанса для дочерних частот демонстрируется с помощью биспектров, на которых произведение амплитуд показано на декартовом произведении частотных диапазонов. После фильтрации пространственных полей горизонтальной компоненты скорости по полученным частотам получены соответствующие волновые векторы, также удовлетворяющие условиям триадного резонанса волновых векторов. Результаты хорошо соответствуют данным экспериментов, проводимых в ENS de Lyon.

**Ключевые слова:** волновые аттракторы, внутренние волны, преобразование Гильберта, преобразование Фурье, частотно-временные диаграммы

**DOI:** 10.15514/ISPRAS-2016-28(1)-16

**Для цитирования:** Провидухина М., Сибгатуллин И. Применение спектральных методов обработки данных к результатам численного моделирования аттракторов внутренних волн. Труды ИСП РАН, том 28, вып. 1, 2016 г., с. 275-282. DOI: 10.15514/ISPRAS-2016-28(1)-16

## 1. Введение

В отличие от атмосферы Земли, мировой океан не является классической тепловой машиной, и тепловые процессы вертикального обмена энергией, наряду с ветровыми воздействиями, играют существенную роль лишь у поверхности Океана. В тоже время существенное влияние на глобальную динамику Океана оказывают глубоководные процессы перемешивания, которые в настоящее время изучены в гораздо меньшей степени, как экспериментально так и фундаментально. Существенное влияние на глобальную динамику Океана оказывают глубоководные процессы перемешивания, которые в настоящее время как экспериментально так и фундаментально изучены в гораздо меньшей степени, чем приповерхностные явления, связанные с ветровым воздействием и теплообменом. В глубинах океана внутренние волны, возникающие из-за приливных течений и обтекания донного рельефа, могут сильно влиять на процессы вертикального перемешивания.

Открытые в 1995 году Лео Маасом [1, 2] аттракторы внутренних волн показали, что в определенных геометрических конфигурациях (которые как оказалось могут быть достаточно простыми) энергия внутренних волн может эффективно аккумулироваться вдоль определенных путей. После работ Лео Мааса аттракторам внутренних волн было посвящено большое количество исследований, в результате в настоящее время имеется достаточно развитая теория формирования аттракторов внутренних волн небольшой амплитуды.

Поэтому сейчас основной интерес исследователей вызывает поведение аттракторов внутренних волн большой амплитуды. При этом линеаризованные уравнения уже не описывают поведение аттракторов, которые могут становиться неустойчивыми, турбулентными, менять свою структуру с течением времени, оказывать существенное влияние на фоновую стратификацию и проявлять другие нелинейные свойства.

В Высшей нормальной школе Лиона в последние годы развиваются методики анализа данных экспериментов, связанных с внутренними волнами. Они позволили качественно и количественно описать ряд важных закономерностей при распространении внутренних волн, образовании и разрушении аттракторов [3].

Несмотря на успехи в экспериментальном изучении волновых аттракторов, в методиках определения параметров течений и гидродинамических полей имеется ряд существенных ограничений. Эти ограничения снимаются прямым численным моделированием. Но рассматриваемые явления обладают очень большим интервалом пространственных масштабов из-за большого числа Прандтля-Шмидта, поэтому такие исследования вплоть до последнего времени не были возможны и численное моделирование ограничивалось лишь линейными режимами, которые лишь подтвердили уже существующую теорию [4, 5]. Лишь недавно были проведено трехмерное прямое численное моделирование, полностью соответствующие экспериментам, и впервые гидродинамические поля экспериментов и расчетов соответствовали в пределах десяти процентов как для линейных, так и для нелинейных режимов [6, 7]. В настоящей работе мы применяем спектральные и статистические методы анализа гидродинамических полей к результатам численного моделирования к слабонелинейным режимам. В дальнейшем они позволят исследовать более сложные конфигурации и сильно нелинейные (турбулентные) режимы с перемешиванием.

## 2. Математическая модель и прямое численное моделирование

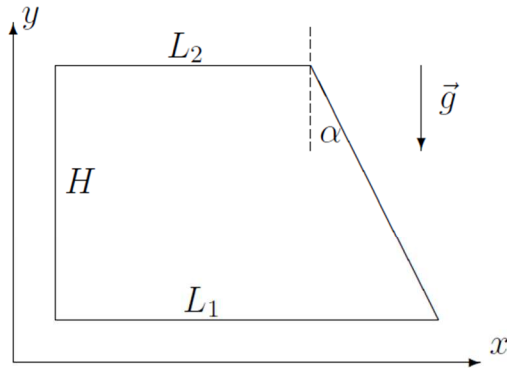


Рис. 1: 2D проекция расчетной области.

Fig. 1. 2D projection of the computational domain

Схема экспериментальной установки в двумерной проекции показана на рисунке 1.

В контейнере трапециoidalной формы находится раствор соли с постоянной по высоте частотой плавучести  $N(z) = \sqrt{\frac{-g}{\rho(z)} \frac{d\rho(z)}{dz}}$ . Соответственно солёность распределена экспоненциально по высоте, но в условиях эксперимента она практически не отличается от линейного распределения. Можно показать, что условия эксперимента соответствуют предпосылкам использования приближения Буссинеска даже лучше, чем традиционные задачи конвекции. Поэтому полную систему уравнений можно записать в виде:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v^k \nabla_k \vec{v} = -\nabla \frac{\tilde{p}}{\rho_m} + \nu \Delta \vec{v} + \rho_s \vec{g} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + v^k \nabla_k \rho_s = \lambda \Delta \rho_s, \quad \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (2)$$

Граничные условия для скорости на боковых и нижней границах соответствуют условиям прилипания. На верхней границе ставится условие отсутствия вязких касательных напряжений. Для солёности на всех границах ставится условие изоляции.

Левая граница совершает колебания следующего вида:

$$x_b(0, y, t) = a \cos(\pi y/H) \cos(\omega_0 t). \quad (3)$$

Прямое численное моделирование проводилось с помощью спектрально-элементного метода [8] и кода nek5000.

На рисунке 2 показаны примеры устойчивого аттрактора (слева) и неустойчивого (справа). Динамика горизонтальной компоненты скорости показана на рисунках 3, 4.

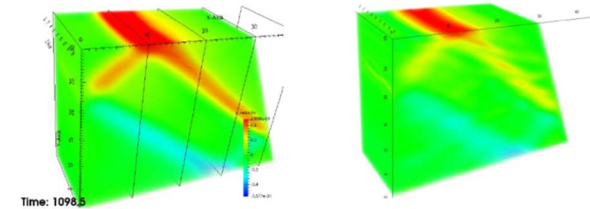


Рис. 2: Устойчивый и неустойчивый аттракторы. Цветом показана горизонтальная составляющая поля скорости.

Fig. 2. Stability and instability attractors. The colors show the horizontal component of the velocity field

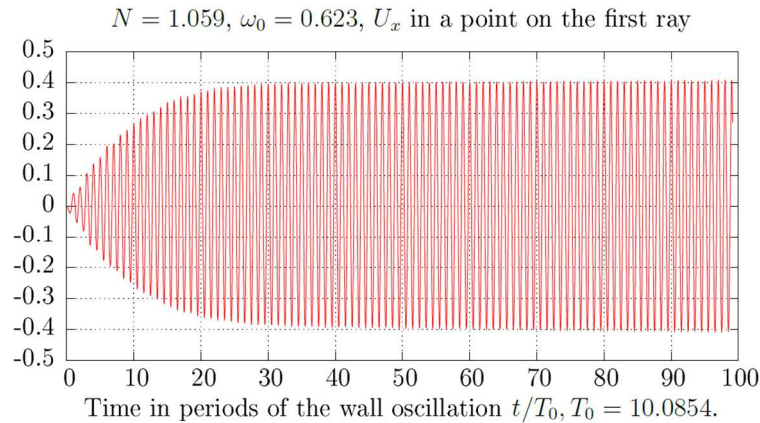


Рис. 3: Зависимость  $v_x$  от времени в точке на первом луче аттрактора.

Fig. 3. Dependence  $v_x$  on time at a point on the first ray of the attractor

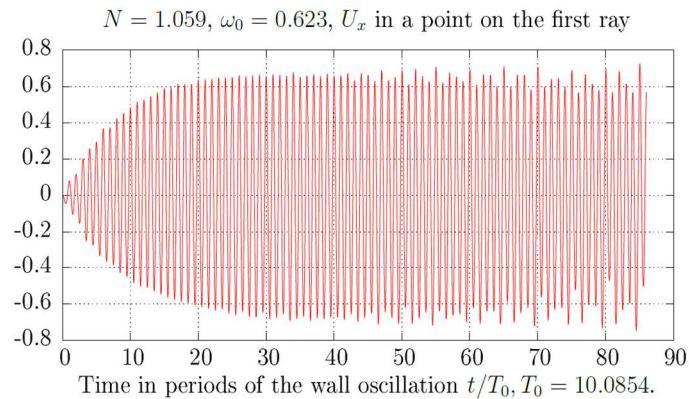


Рис. 4: Зависимость  $v_x$  от времени в точке на первом луче аттрактора. Слабая неустойчивость аттрактора.

Fig. 4. Dependence  $v_x$  on time at a point on the first ray of the attractor. Weak attractor instability.

### 3. Применение спектральных методов для описания неустойчивости и процессов перемешивания

Для выявления имеющихся частот в системе построим частотно-временную диаграмму, а для проверки выполнения условий триадного резонанса на дочерние волны построим так называемый биспектр, отложив по

горизонтальной и вертикальной осям частоты, при этом цвет на диаграмме пропорционален произведению соответствующих амплитуд.

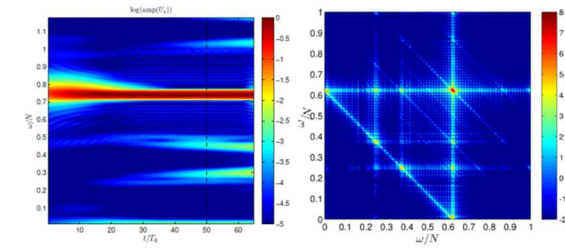


Рис. 5: Частотно-временная диаграмма и биспектр для слабоустойчивого аттрактора

Fig. 5. Time-frequency diagram and bispectrum for weakly unstable attractor

Частотно-временная диаграмма позволяет увидеть появление вторичных частот  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , а биспектр доказывает выполнение соотношений  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ , поскольку дочерние частоты лежат на антидиагонали квадрата, с основанием, равным родительской частоте. Применение подобной техники к результатам DNS также позволит исследовать каскады триадных резонансов процессы перемешивания и динамику спектра на длительных временах.

### Список литературы

- [1]. L. R. M. Maas and F.-P. A. Lam, "Geometric focusing of internal waves", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 300, pp. 1-41, 1995.
- [2]. L. R. M. Maas, D. Benielli, J. Sommeria, and F.-P. A. Lam, "Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid", *Nature*, vol. 388, pp. 557-561, Aug. 1997.
- [3]. H. Socolan, E. Ermanyuk, and T. Dauxois, "Nonlinear Fate of Internal Wave Attractors", *Physical Review Letters*, vol. 110, p. 234501, June 2013.
- [4]. N. Grisouard, C. Staquet, and I. Paireaud, "Numerical simulation of a two-dimensional internal wave attractor", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 614, p. 1, Oct. 2008.
- [5]. J. Hazewinkel, N. Grisouard, and S. B. Dalziel, "Comparison of laboratory and numerically observed scalar fields of an internal wave attractor", *European Journal of Mechanics B Fluids*, vol. 30, pp. 51-56, Jan. 2011.
- [6]. C. Brouzet, S. Joubaud, E. Ermanyuk, I. Sibgatullin, and T. Dauxois, "Energy cascade in internal-wave attractors", *Europhysics Letters*, vol. 113, issue 4, pp. 44001, 2016.
- [7]. C. Brouzet, Sibgatullin, E. Ermanyuk, H. Socolan, and T. Dauxois, "Internal wave attractors: experiments and numerical simulations", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 793, pp. 109-131, 2016.
- [8]. M. Deville, P. Fischer, E. Mund, and D. Gartling, "High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow", *Applied Mechanics Reviews*, vol. 56, p. B43, 2003.

## Application of statistical and spectral methods to computational modeling of internal wave attractors

<sup>1</sup>M.Providukhina <itimasha@gmail.com>

<sup>1,2</sup>I. Sibgatullin <sibgat@imec.msu.ru>

<sup>1</sup>Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics,  
Main Building, 1 Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow, 19991, Russia,

<sup>2</sup>Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences,  
25, Alexander Solzhenitsyn st., Moscow, Russia, 109004.

**Abstract.** Direct numerical simulation of internal gravity waves propagation and formation of internal waves attractors in trapezoidal tank, which was filled with stably stratified salt solution of constant buoyancy frequency. The left vertical boundary oscillates with constant time frequency and has the form of semi-cosine of the tank height. The right wall is inclined to the vertical and performs focusing of waves, the other two boundaries are horizontal. The upper wall has stress free boundary conditions, on the other boundaries no-slip condition is imposed. Navier—Stokes equations in Boussinesq approximation and diffusive transport of salt are used as mathematical model. Direct numerical simulation is performed with the help of spectral element approach of 8-th order and modified code nek5000. Hilbert transforms and time-frequency diagrams were applied to the results of direct numerical simulation of internal wave attractors. In particular, with the help of phase reconstruction we obtained wave vectors, corresponding to time frequencies from time-frequency diagrams. To obtain phase images Hilbert transforms with filtration over narrow intervals of frequencies were used. Time-frequency diagrams for moderate forcing amplitudes show appearance of daughter waves of frequencies, corresponding to triadic resonance, which is also demonstrated with the help of bispectra: product of amplitudes on the background of cross product of frequency intervals. The results are close to data of experiments, being carried out at ENS de Lyon.

**Keywords:** internal waves, wave attractor, Hilbert transform.

**DOI:** 10.15514/ISPRAS-2016-28(1)-16

**For citation:** Providukhina M., Sibgatullin I. Application of statistical and spectral methods to computational modeling of internal wave attractors. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, 2016, vol. 28, issue 1, pp. 275-282 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2016-28(1)-16

## References

- [1]. L. R. M. Maas and F.-P. A. Lam, “Geometric focusing of internal waves”, Journal of Fluid Mechanics, vol. 300, pp. 1-41, 1995.
- [2]. L. R. M. Maas, D. Benielli, J. Sommeria, and F.-P. A. Lam, “Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid”, Nature, vol. 388, pp. 557-561, Aug. 1997.
- [3]. H. Scolan, E. Ermanyuk, and T. Dauxois, “Nonlinear Fate of Internal Wave Attractors”, Physical Review Letters, vol. 110, p. 234501, June 2013.
- [4]. N. Grisouard, C. Staquet, and I. Pairaud, “Numerical simulation of a two-dimensional internal wave attractor”, Journal of Fluid Mechanics, vol. 614, p. 1, Oct. 2008.

- [5]. J. Hazewinkel, N. Grisouard, and S. B. Dalziel, “Comparison of laboratory and numerically observed scalar fields of an internal wave attractor”, European Journal of Mechanics B Fluids, vol. 30, pp. 51-56, Jan. 2011.
- [6]. C. Brouzet, S. Joubaud, E. Ermanyuk, I. Sibgatullin, and T. Dauxois, “Energy cascade in internal-wave attractors”, Europhysics Letters, vol. 113, issue 4, pp. 44001, 2016.
- [7]. C. Brouzet, Sibgatullin, E. Ermanyuk, H. Scolan, and T. Dauxois, “Internal wave attractors: experiments and numerical simulations”, Journal of Fluid Mechanics, vol. 793, pp. 109-131, 2016.
- [8]. M. Deville, P. Fischer, E. Mund, and D. Gartling, “High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow”, Applied Mechanics Reviews, vol. 56, p. B43, 2003.