

# Модификация метода погруженных границ LS-STAG для моделирования течений вязкоупругих жидкостей

В.В. Пузикова <valeria.puzikova@gmail.com>  
МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
105005, Россия, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, дом 5

**Аннотация.** Представлена авторская модификация метода погруженных границ LS-STAG для моделирования течений вязкоупругих жидкостей, описываемых линейными и квазилинейными моделями скоростного типа (моделями Максвелла, Джеффери, Джонсона – Сигельмана, Максвелла-А, Олдройда-Б, Олдройда-А, верхней конвективной моделью Максвелла). Построены дискретные аналоги различных конвективных производных (Олдройда, Коттера – Ривлина, Яумана – Зарембы – Нолла). К трем разнесенным сеткам базового метода LS-STAG добавлена четвертая сетка, ячейки которой являются контрольными объемами для дискретизации уравнения для расчета касательных неньютоновских вязкоупругих напряжений. Нормальные неньютоновские напряжения вычисляются в центрах ячеек основной сетки, а касательные – в углах ячеек данной сетки. Интегрирование по времени получающейся после LS-STAG-дискретизации по пространству дифференциально-алгебраической системы производится при помощи метода, основанного на схеме предиктор-корректор первого порядка. Этот метод состоит из двух шагов. Шаг предиктора приводит к решению разностного аналога уравнения Гельмгольца для прогноза скорости, а шаг корректора – к решению разностного аналога уравнения Пуассона для поправки давления. После этого решаются уравнения для упругой составляющей тензора неньютоновских напряжений. Для верификации метода использовались различные модельные задачи, в частности, моделирование течения Пуазейля. Полученная модификация метода LS-STAG реализована в разрабатываемом автором программном комплексе, позволяющем проводить моделирование течений вязкой несжимаемой среды. Комплекс позволяет моделировать обтекание движущихся профилей произвольной формы и систем из любого числа профилей, имеющих одну или две степени свободы, в т.ч. турбулентным потоком. При решении тестовых задач метод обеспечивает второй порядок точности.

**Ключевые слова:** несжимаемая среда; вязкоупругие жидкости; модели вязкоупругих жидкостей скоростного типа; метод погруженных границ; метод LS-STAG

**DOI:** 10.15514/ISPRAS-2017-29(1)-5

**Для цитирования:** Пузикова В.В. Модификация метода погруженных границ LS-STAG для моделирования течений вязкоупругих жидкостей. Труды ИСП РАН, том 29, вып. 1, 2017 г., стр. 71-84. DOI: 10.15514/ISPRAS-2017-29(1)-5

## 1. Введение

Существует широкий класс разнообразных сред, для которых закон вязкого трения Ньютона не выполняется. Такие жидкости называются неньютоновскими [1]. Вязкость таких жидкостей зависит от скорости течения, второго инварианта тензора скоростей, времени. Примерами неньютоновских жидкостей являются суспензии, эмульсии, цельная кровь, нефти, мазуты, глинистые и цементные растворы, растворы полимеров и т.д. Традиционно неньютоновские жидкости делятся на три основные группы: обобщенные ньютоновские жидкости, неньютоновские неустойчивые жидкости и неньютоновские вязкоупругие жидкости [2].

В данной работе будут рассмотрены вязкоупругие жидкости скоростного типа. Помимо числа Рейнольдса  $Re$  такие жидкости характеризуются числом

Вайсенберга  $We = \frac{\lambda \cdot V_\infty}{D}$  ( $\lambda$  – время релаксации;  $V_\infty$  – характерная скорость;

$D$  – характерный размер), которое отражает упругие свойства вязкоупругого материала. Очень серьезным вопросом при численном моделировании течений неньютоновских вязкоупругих жидкостей, описываемых моделями скоростного типа, является отсутствие сходимости численных методов для высокоупругих течений – так называемая проблема большого числа Вайсенберга (*high Weissenberg number problem, HWNP*). Значение  $We_{crit}$ , начиная с которого численный метод перестает сходиться, сильно зависит от способа дискретизации уравнений. При этом измельчение сетки не позволяет повысить значение  $We_{crit}$ . Более того, наблюдается парадоксальная ситуация: измельчение сетки приводит к уменьшению значения  $We_{crit}$  [3].

В последние годы в вычислительной гидродинамике возрастает популярность методов погруженных границ [4], в которых сетка не связана с границей тела и не изменяется на протяжении всего расчета, несмотря на движение погруженных границ. Данные методы предполагают использование прямоугольных сеток. При этом важно обеспечить высокую точность решения задачи в усеченных ячейках, через которые проходит погруженная граница.

К наиболее эффективным методам этого класса относят метод LS-STAG [5], в котором для представления погруженной границы используется аппарат функций уровня [6]. LS-STAG-дискретизация производится по одним и тем же формулам, как в прямоугольных ячейках, так и в усеченных, причем шаблон дискретизации имеет в двумерном случае пятиточечную структуру. К настоящему моменту построена LS-STAG-дискретизация двумерных уравнений Навье – Стокса для вязкой несжимаемой среды [5], разработаны модификации метода LS-STAG, позволяющие использовать модели турбулентности Смагоринского, Спаларта – Аллмараса,  $k-\varepsilon$ ,  $k-\omega$  и  $k-\omega$  SST в рамках RANS, LES и DES подходов [7, 8], а также модификации для решения сопряженных задач гидроупругости [9]. Как и многие

«нестандартные» высокоточные методы, метод погруженных границ LS-STAG не реализован в широко распространенных пакетах вычислительной гидродинамики, поэтому весьма актуальной задачей является разработка эффективной программной реализации метода LS-STAG и его модификаций [10].

Целью данной работы является разработка модификации метода LS-STAG для расчета течений вязкоупругих жидкостей, описываемых моделями скоростного типа, и верификация полученного метода на модельных задачах.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается течение вязкоупругой жидкости в прямоугольной расчетной области  $\Omega$  (рис. 1). В области может находиться профиль характерного размера  $D$  (или система профилей) с границей  $K$ . Предполагается, что погруженные границы являются неподвижными, однако в дальнейшем полученные формулы могут быть обобщены на случай движущихся погруженных границ.

В безразмерных переменных математическая постановка задачи имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} = \nabla \cdot \hat{\tau}^e, \\ \hat{\tau}^e + \lambda_r \tilde{D} \hat{\tau}^e = 2\nu_e (\hat{S} + \lambda_r \tilde{D} \hat{S}), \\ \vec{v}(x, y, 0) = \vec{v}_0(x, y), \quad \hat{\tau}^e(x, y, 0) = \hat{\tau}_0^e(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ \vec{v}|_{\Gamma_2} = \vec{v}_{\text{inflow}} = \vec{v}_{\text{inflow}}(y), \quad \vec{v}|_{\Gamma_1} = \vec{v}|_{\Gamma_3}, \quad \vec{v}|_K = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_4} = \vec{0}, \\ \hat{\tau}^e|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = \hat{\tau}^{e, bc}(x, y, t), \quad \hat{\tau}^e|_K = \hat{0}, \quad \frac{\partial \hat{\tau}^e}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_4} = \hat{0}. \end{array} \right.$$

Здесь  $\vec{n}$  – внешняя нормаль;  $t$  – безразмерное время;  $x, y$  – безразмерные координаты;  $\text{Re}$  – число Рейнольдса;  $p$  – безразмерное давление;  $\vec{v} = \vec{v}(x, y, t) = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_y$  – безразмерная скорость;  $\lambda$  – время релаксации;

$\lambda_r$  – время запаздывания;  $\nu_e$  – вязкость вязкоупругой составляющей;  $\tilde{D}$  – дифференциальный оператор производной по времени (в зависимости от модели неньютоновской жидкости это может быть частная или одна из конвективных производных);  $\hat{\tau}^e$  – вязкоупругая составляющая тензора напряжений [11];  $\hat{S} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{v} + [\nabla \vec{v}]^T)$  – тензор скоростей деформации.

В зависимости от вида оператора  $\tilde{D}$  и значения  $\lambda_r$  рассматриваемая жидкость описывается одной из следующих моделей скоростного типа: Максвелла,

Максвелла-А или верхней конвективной моделью Максвелла [12], Джеффри [13], Олдройда-Б или Олдройда-А [14], Джонсона – Сигельмана [15].

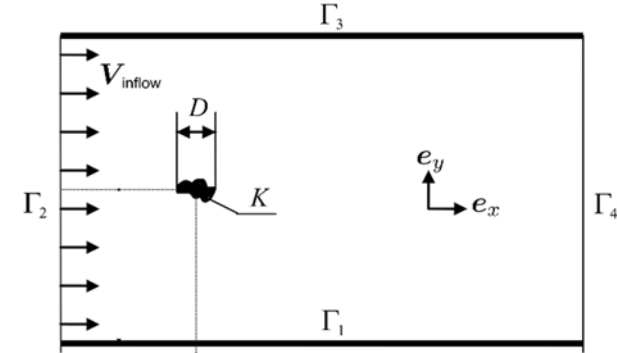


Рис. 1. Расчетная область  $\Omega$

Fig. 1. Computational domain  $\Omega$

## 3. Модификация метода LS-STAG

Прямоугольная расчётная область  $\Omega$  делится на прямоугольные ячейки  $\Omega_{i,j} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$  с площадями  $V_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j$  и центрами

$\vec{x}_{i,j}^c = (x_i^c, y_j^c)$ . Ячейка  $\Omega_{i,j}$  данной сетки, которая далее будет называться

«основной», является контрольным объёмом, который используется для дискретизации уравнения неразрывности, а также уравнений для нормальных неньютоновских вязкоупругих напряжений. Ячейки смещенных  $x$ -сетки и  $y$ -сетки

$\Omega_{i,j}^u = (x_i^c, x_{i+1}^c) \times (y_{j-1}, y_j)$  и  $\Omega_{i,j}^v = (x_{i-1}, x_i) \times (y_j^c, y_{j+1}^c)$  являются

контрольными объёмами для дискретизации уравнений импульса в проекции на оси  $Ox$  и  $Oy$  соответственно (рис. 2). Также вводится дополнительная четвертая разнесенная разнесенная сетка,  $xy$ -сетка, ячейки которой

$\Omega_{i,j}^{xy} = (x_i^c, x_{i+1}^c) \times (y_{j-1}^c, y_j^c)$  являются контрольными объёмами для

дискретизации уравнения для расчета касательных неньютоновских вязкоупругих напряжений.

В двумерном случае все усеченные ячейки можно разделить на три группы: трапецевидные, треугольные и пятиугольные. Положения точек, в которых вычисляются неизвестные величины, зависят от типа ячейки. Примеры всех типов ячеек представлены на рис. 3.

Интегрирование по времени получающейся после LS-STAG-дискретизации по пространству дифференциально-алгебраической системы производится при помощи метода, основанного на схеме предиктор-корректор первого порядка. Этот метод состоит из двух шагов. Шаг предиктора приводит к решению

разностного аналога уравнения Гельмгольца для прогноза скорости  $\tilde{U}$  в момент времени  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ :

$$\frac{M(\tilde{U} - U^n)}{\Delta t} + C[\bar{U}^n]U^n + S^{ib,c,n} - D^T(P^n - T_{norm}^{e,n}) - D^T T_{xy}^{e,n} - \nu K \tilde{U} - \nu S^{ib,\nu} = 0.$$

Здесь  $U^n$  – вектор, компонентами которого являются значения скоростей  $u_{i,j}^n$  и  $v_{i,j}^n$ ;  $P^n$  – вектор с компонентами  $p_{i,j}^n$ ;  $T_{norm}^{e,n}$  – вектор, компонентами которого являются значения нормальных вязкоупругих напряжений  $\tau_{xx}^e|_{i,j}^n$  и  $\tau_{yy}^e|_{i,j}^n$ ;  $T_{xy}^{e,n}$  – вектор с компонентами  $\tau_{xy}^e|_{i,j}^n$ ;  $M$  – диагональная матрица, элементы которой – площади ячеек  $\Omega_{i,j}^u$  и  $\Omega_{i,j}^v$ ;  $C[\bar{U}]$  и  $K$  – матрицы, получаемые при LS-STAG-дискретизации конвективных и вязких потоков соответственно;  $-D^T$  – матрица, задающая дискретный аналог оператора градиента;  $D^T$  – матрица, задающая дискретный аналог оператора дивергенции на ху-сетке;  $S^{ib,c,n}$  и  $S^{ib,\nu}$  – источниковые члены, возникающие в силу граничных условий;  $\nu = \frac{1}{Re}$ .

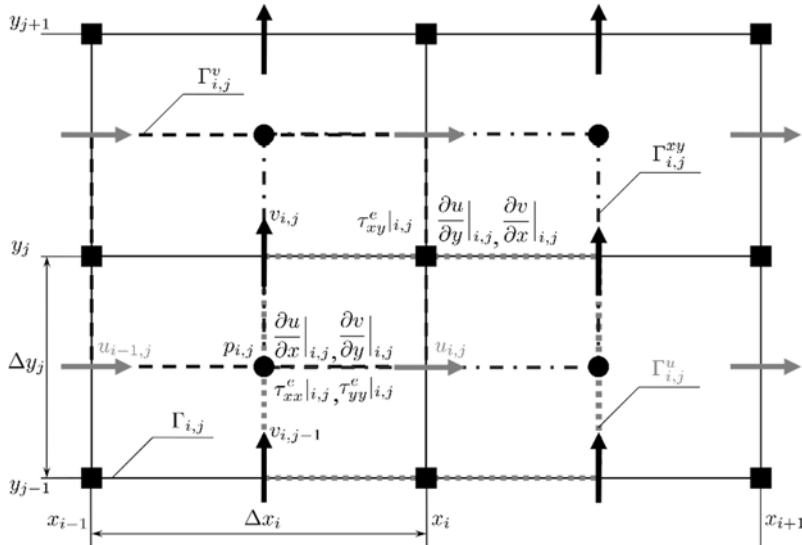


Рис. 2. Разнесенные сетки

Fig. 2. Staggered meshes

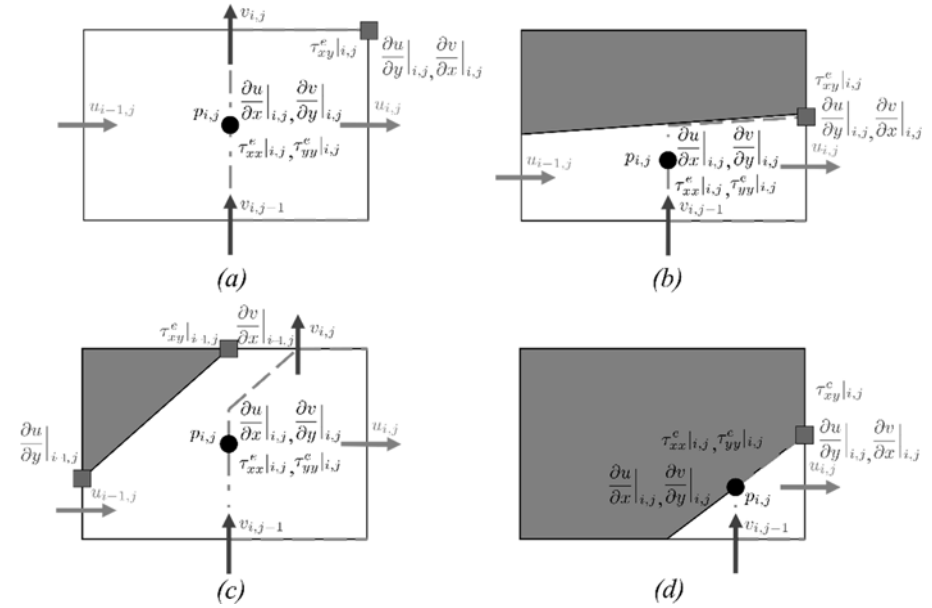


Рис. 3. Положение точек вычисления давления, скоростей и напряжений для основных типов ячеек LS-STAG-сетки: (a) прямоугольная «жидкая» ячейка; (b) усеченная северная трапецевидная ячейка; (c) усеченная северо-западная пятиугольная ячейка; (d) усеченная северо-западная треугольная ячейка

Fig. 3. Location of the variables discretization points on the LS-STAG mesh: (a) Cartesian Fluid Cell; (b) North Trapezoidal Cell; (c) Northwest Pentagonal Cell; (d) Northwest Triangle Cell

Шаг корректора приводит к решению разностного аналога уравнения Пуассона для функции давления  $\Phi = \Delta t(P^{n+1} - P^n)$ :

$$A\Phi = D\tilde{U} + \bar{U}^{ib,n+1},$$

где  $A = -DM^{-1}D^T$ . Затем определяются скорости и давление в момент времени  $t_{n+1}$ :

$$U^{n+1} = \tilde{U} + M^{-1}D^T\Phi, \quad P^{n+1} = P^n + (\Phi/\Delta t).$$

После этого рассчитываются значения вязкоупругих напряжений  $T^{e,n+1}$  в момент времени  $t_{n+1}$ :

$$M_e T^{e,n+1} + \lambda \frac{M_e(T^{e,n+1} - T^{e,n})}{\Delta t} = 2\nu_e M_e S^{n+1} + \frac{2\nu_e \lambda T M_e(S^{n+1} - S^n)}{\Delta t} + CD(\bar{U}^{n+1}, X^n).$$

Здесь  $M_e$  – диагональная матрица, элементы которой – площади ячеек  $\Omega_{i,j}$  и  $\Omega_{i,j}^{xy}$ ;  $S$  – вектор, компонентами которого являются компоненты тензора скоростей деформации в соответствующих точках;  $X^n = 2\nu_e \lambda_r S^{n+1} - \lambda T^{e,n}$ ;  $CD(\bar{U}^{n+1}, X^n)$  – дискретный аналог конвективной производной  $X^n$  (без учета частной производной по времени). Отметим, что при построении LS-STAG-дискретизации конвективной производной учитывается, что уравнение для расчета неньютоновских напряжений в рассматриваемых моделях вязкоупругих жидкостей является уравнением гиперболического типа.

#### 4. Программный комплекс «LS-STAG»

Созданная модификация метода LS-STAG для моделирования течений вязкоупругих жидкостей реализована в разрабатываемом автором программном комплексе. Программа написана на языке C++ и имеет объектно-ориентированную легко расширяемую структуру. Общая схема работы программного комплекса представлена в работе [10]. При проведении расчетов возможно использование таких технологий параллельного программирования, как Intel® Cilk™ Plus [16], Intel® TBB [17], OpenMP (реализация из Intel® Parallel Studio XE 2015, стандарт 4.0). Помимо моделирования течений вязкоупругих жидкостей комплекс позволяет моделировать обтекание профилей произвольной формы и их систем, в т.ч. движущихся и имеющих степени свободы. В расчетах возможно использовать модели турбулентности Смагоринского, Спаларта – Аллмараса,  $k-\varepsilon$ ,  $k-\omega$  и  $k-\omega$  SST в рамках RANS, LES и DES подходов.

На рис. 4 представлена иерархия структур, реализующих работу с моделями неньютоновских жидкостей: хранение, инициализацию, загрузку, сохранение и вычисление неньютоновских напряжений. В базовой структуре NonNewtonianModelInterface хранятся указатели на структуру, в которой хранится дискретный аналог тензора неньютоновских напряжений SymTensor\* stress, и структуру, которая реализует работу с дискретным аналогом тензора скоростей деформации StrainRateTensor\* strainRate.

К настоящему моменту в программном комплексе реализованы структуры для работы с линейными и квазилинейными моделями скоростного типа. Основная часть работы по вычислению компонент дискретного аналога тензора вязкоупругих напряжений реализована в структуре MaxwellFluid (реализует модель Максвелла), унаследованной от структуры LinearRateTypeViscoElasticModelInterface. Учет времени запаздывания  $\lambda_r$  происходит в структуре JeffreysFluid (реализует модель Джеффри), унаследованной от структуры MaxwellFluid. Модели Максвелла

и Джеффри являются линейными – в качестве оператора  $\tilde{D}$  в них выступает обычная частная производная по времени:

$$\tilde{D}X = \frac{\partial X}{\partial t}.$$

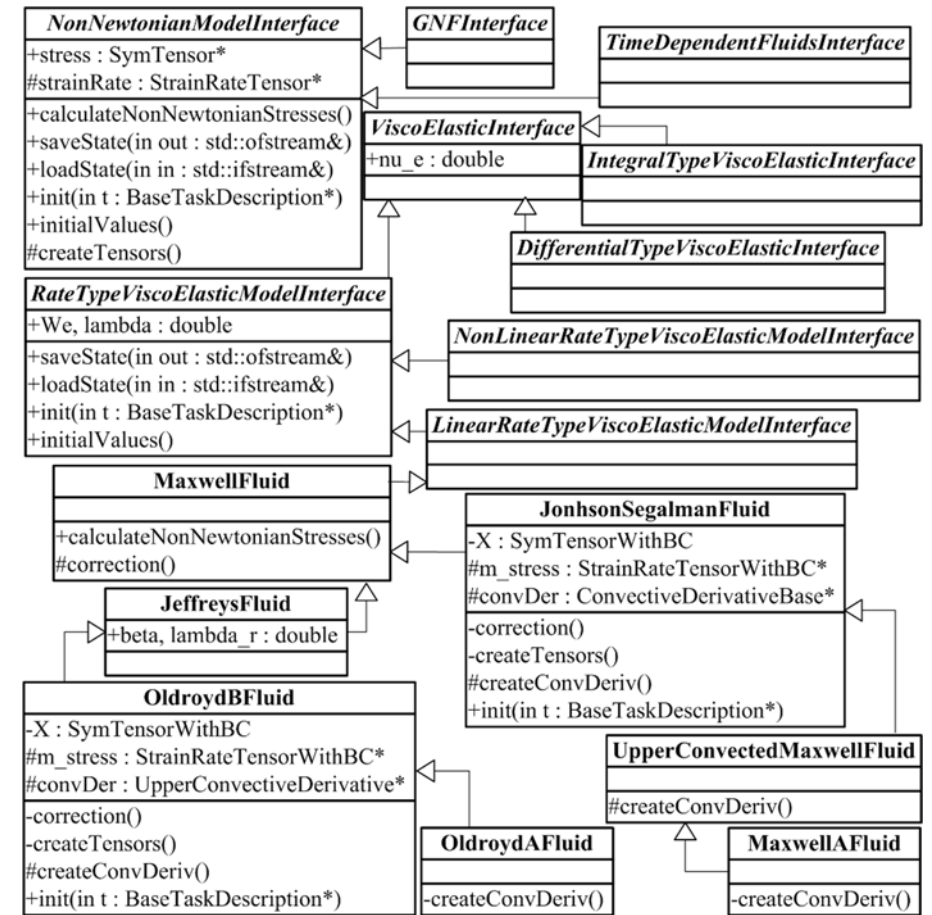


Рис. 4. Иерархия структур, реализующих работу с моделями неньютоновских жидкостей, в частности с линейными и квазилинейными моделями вязкоупругих жидкостей скоростного типа

Fig. 4. The hierarchy of structures, implementing the work with models of non-Newtonian fluids, such as linear and quasi-linear rate type models of viscoelastic fluids

Квазилинейные модели, в которых оператор  $\tilde{D}$  является одной из конвективных производных, реализованы в структурах, представленных в табл.

1. В этих структурах хранится указатель convDer на структуру, в которой реализована работа с конвективной производной, используемой в данной модели.

Табл. 1. Структуры, реализующие работу с квазилинейными моделями вязкоупругих жидкостей скоростного типа

Table 1. Structures, implementing the work with viscoelastic quasi-linear rate type models

Модель	Структура	Унаследована от	Конвективная производная
Джонсона – Сигельмана	JonhsonSegalmanFluid	MaxwellFluid	вращательная
Верхняя конвективная модель Максвелла	UpperConvectedMaxwellFluid	JonhsonSegalmanFluid	верхняя
Максвелла-А	MaxwellAFluid	UpperConvectedMaxwellFluid	нижняя
Олдройда-Б	OldroydBFluid	JeffreysFluid	верхняя
Олдройда-А	OldroydAFluid	OldroydBFluid	нижняя

В рассматриваемых моделях используются следующие виды конвективных производных [2]: верхняя (производная Олдройда):

$$\tilde{D}X = \overset{\nabla}{X} = \frac{\partial X}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)X - X(\nabla \vec{v}) - (\nabla \vec{v})^T X;$$

нижняя (производная Коттера – Ривлина):

$$\tilde{D}X = \overset{\Delta}{X} = \frac{\partial X}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)X + X(\nabla \vec{v}) + (\nabla \vec{v})^T X;$$

и вращательная (производная Яумана, или производная Яумана – Зарембы – Нолла):

$$\tilde{D}X = \overset{o}{X} = \frac{1}{2} \left( \overset{\nabla}{X} + \overset{\Delta}{X} \right).$$

## 5. Вычислительные эксперименты

В качестве примера приведем результаты численного моделирования установившегося течения Пуазейля, для которого известно точное

решение [18, 19], в области  $\Omega = [0; 20D] \times [0; 2D]$ . Жидкость описывается моделью Олдройда-Б. Погруженное тело отсутствует. Функции, задающие граничные условия в приведенной в начале статьи постановке задачи, в данном случае имеют следующий вид:

$$\vec{V}_{\text{inflow}}(y) = V_{\infty}y(2D - y)\vec{e}_x; \tau_{xx}^{e,bc} = 2\lambda v_e \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2; \tau_{yy}^{e,bc} = 0; \tau_{xy}^{e,bc} = v_e \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Пусть характерный размер  $D = 1$ , характерная скорость  $V_{\infty} = 1$ . Тогда

$$\text{We} = \frac{\lambda \cdot V_{\infty}}{D} = \lambda, \text{Re} = \frac{V_{\infty} \cdot D}{\nu} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_s + \nu_e}, \lambda_r = \beta \cdot \lambda = \frac{\nu_s \cdot \lambda}{\nu_s + \nu_e} = \frac{\nu_s \cdot \text{We}}{\text{Re}}.$$

Здесь  $\nu_s$  – вязкость растворителя, который является ньютоновской жидкостью;  $\beta$  – доля вязкости растворителя. Будем рассматривать течение при  $\text{Re} = 0,1$ ,  $\beta = 0,1$ . Этим значениям параметров соответствуют следующие значения вязкости растворителя и вязкоупругой составляющей:

$$\nu_s = \frac{\beta \cdot V_{\infty} \cdot D}{\text{Re}} = \frac{\beta}{\text{Re}} = 1, \nu_e = \frac{(1 - \beta) \cdot V_{\infty} \cdot D}{\text{Re}} = \frac{1 - \beta}{\text{Re}} = 9.$$

Будем рассматривать течения при значениях числа Вайсенберга в следующем диапазоне:

$$\text{We} = 0, 1 \dots 1, 0.$$

Для оценки точности разработанной модификации метода LS-STAG задачу будем решать на равномерных сетках (табл. 2). Точное стационарное решение поставленной задачи имеет вид [18,19]

$$u = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{y(2D - y)}{2\nu}; v = 0; \tau_{xx}^e = 2\lambda v_e \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2; \tau_{yy}^e = 0; \tau_{xy}^e = v_e \frac{\partial u}{\partial y}.$$

На рис. 5 показаны зависимости  $L_{\infty}$ -нормы ошибки ( $E_h$ ) от выбранного шага по пространству  $h$  для  $u$ ,  $v$ ,  $\tau_{xx}^e$ ,  $\tau_{xy}^e$ . Видно, что точность полученной модификации метода близка к  $O(h^2)$ .

Табл. 2. Сетки, используемые при решении модельной задачи

Table 2. Meshes used for model problem

Сетка	Число ячеек	Шаг по пространству $h$	Шаг по времени $\Delta t$
$M_1$	4000	0,1	0,05
$M_2$	16000	0,05	0,025
$M_3$	64000	0,025	0,0125



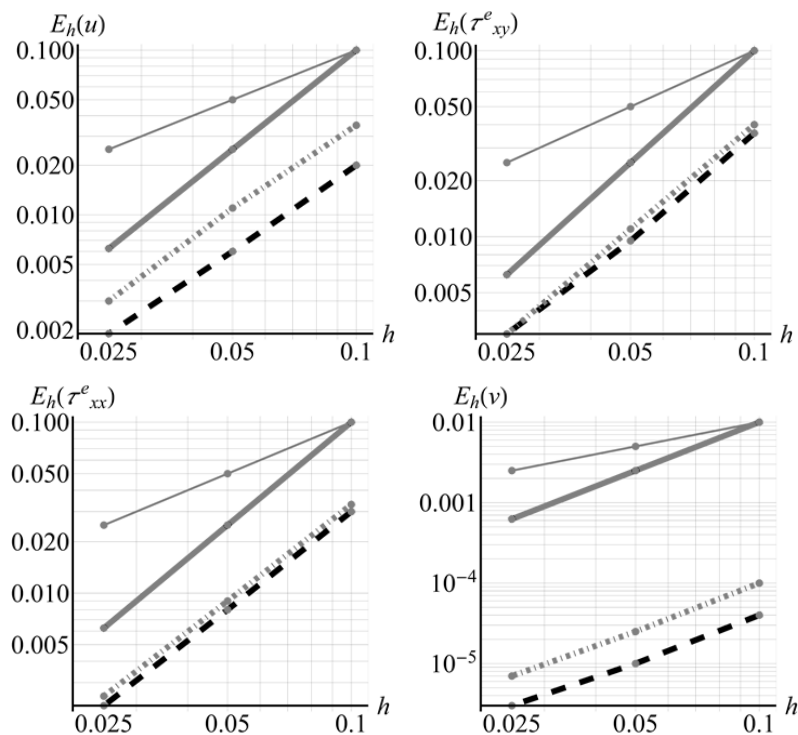


Рис. 5. Зависимости  $L_\infty$ -нормы ошибки ( $E_h$ ) от шага по пространству  $h$ : тонкая сплошная линия –  $O(h)$ ; жирная сплошная линия –  $O(h^2)$ ; пунктирная линия – расчет при  $We = 0,1$   $O(h^2)$ ; штрихпунктирная линия – расчет при  $We = 1,0$

Fig. 5.  $L_\infty$  norm of the errors ( $E_h$ ) versus mesh size: thin solid line –  $O(h)$ ;

bold solid line –  $O(h^2)$ ; dotted line – computation at  $We = 0,1$   $O(h^2)$ ;

dash-dotted line – computation at  $We = 1,0$

## 7. Заключение

Разработана модификация метода погруженных границ LS-STAG для моделирования течений вязкоупругих жидкостей, описываемых линейными и квазилинейными моделями скоростного типа (моделями Максвелла, Джеффри, Джонсона – Сигельмана, Максвелла-А, Олдройда-Б, Олдройда-А, верхней конвективной моделью Максвелла). Данная модификация реализована в

программном комплексе, позволяющем проводить моделирование течений вязкой несжимаемой среды методом LS-STAG. В статье представлены результаты верификации метода на примере тестовой задачи о моделировании течения Пуазейля. Как показывают вычислительные эксперименты, точность полученной модификации метода LS-STAG близка к  $O(h^2)$ .

## Список литературы

- [1]. Owens R.G., Phillips T.N. Computational Rheology. London: Imperial College Press, 2002. 417 p.
- [2]. Galdi G.P., Rannacher R., Robertson A.M., Turek S. Hemodynamical Flows: Modeling, Analysis and Simulation. N.-Y.: Springer, 2008. 501 p.
- [3]. Kim J.M., Kim C., Kim J.H., Chung C., Ahn K.H., Lee S.J. High-resolution finite element simulation of 4:1 planar contraction flow of viscoelastic fluid. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 2005, № 129, pp. 23–37.
- [4]. Mittal R., Iaccarino G. Immersed boundary methods. Annu. Rev. Fluid Mech., 2005, № 37, pp. 239–261.
- [5]. Chen Y., Botella O. The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties. J.Comp. Phys.2010, №229, pp. 043-1076.
- [6]. Osher S., Fedkiw R.P. Level set methods and dynamic implicit surfaces. N. Y.: Springer, 2003. 273 p.
- [7]. Puzikova V.V., Marchevsky I.K. Extension of the LS-STAG immersed boundary method for RANS-based turbulence models and its application for numerical simulation in coupled hydroelastic problems. Proc. VI International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. Venice. 2015, pp. 532–543.
- [8]. Puzikova V.V. On generalization of the LS-STAG immersed boundary method for Large Eddy Simulation and Detached Eddy Simulation. Proc. Advanced Problems in Mechanics International Summer School-Conference. St.-Petersburg. 2015, pp. 411-417.
- [9]. Marchevsky I., Puzikova V. Application of the LS-STAG Immersed Boundary Method for Numerical Simulation in Coupled Aeroelastic Problems. Proc. 11th World Congress on Computational Mechanics, 5th European Conference on Computational Mechanics, 6th European Conference on Computational Fluid Dyn. Barcelona, 2014, pp.1995-2006.
- [10]. Пузикова В.В. Реализация параллельных вычислений в программном комплексе «LS-STAG\_turb» для моделирования течений вязкой несжимаемой среды на системах с общей памятью. Труды ИСП РАН, том 28, вып. 1, 2016 г., стр. 221-242. DOI: 10.15514/ISPRAS-2016-28(1)-13.
- [11]. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964. 216 с.
- [12]. Maxwell J.C. On the dynamical theory of gases. Philos. Trans. R. Soc. 1867. № 157. P. 49–88.
- [13]. Jeffreys H. The Earth Its Origin, History and Physical Constitution. Cambridge: Cambridge University Press, 1929. 612 p.
- [14]. Oldroyd J.G. On the formulation of rheological equations of state. Proc. Roy. Soc. London, 1950, № 200, pp. 523–541.
- [15]. Johnson M.W., Segalman D. A model for viscoelastic fluid behavior which allows non-affine deformation. J. Non-Newton. Fluid Mech., 1977, № 2, pp. 255–270.

- [16]. Intel® Cilk™ Plus. URL: <https://software.intel.com/ru-ru/node/522579> (accessed: 25.10.2015).
- [17]. Reinders J. Intel Threading Building Blocks: Outfitting C++ for Multi-Core Processor Parallelism. Sebastopol: O'Reilly, 2007, 336 p.
- [18]. Keiller R.A. Spatial decay of steady perturbations of plane Poiseuille flow for the Oldroyd-B equation. J. Non-Newton. Fluid Mech., 1993, vol. 46, pp. 129–142.
- [19]. Hayat T., Khan M., Ayub M. Exact solutions of flow problems of an Oldroyd-B fluid. J. Applied Math. and Comp., 2004, vol. 151, pp. 105–119.

## The LS-STAG Immersed Boundary Method Modification for Viscoelastic Flow Computations

V. Puzikova <[valeria.puzikova@gmail.com](mailto:valeria.puzikova@gmail.com)>

BMSTU, 5 2<sup>nd</sup> Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russian Federation

**Abstract.** The LS-STAG immersed boundary cut-cell method modification for viscoelastic flow computations is presented. Rate type viscoelastic flow models (linear and quasilinear) are considered. Formulae for differential types of convected time derivatives the LS-STAG discretization was obtained. Normal non-newtonian stresses are computed at the centers of base LS-STAG mesh cells and shear non-newtonian stresses are computed at the cell corners. The LS-STAG-discretization of extra-stress equations for viscoelastic Maxwell, Jeffreys, upper-convected Maxwell, Maxwell-A, Oldroyd-B, Oldroyd-A, Johnson — Segalman fluids was developed. Time-stepping algorithm is defined by the following three steps. Firstly, a prediction of the velocity and pressure correction are computed by means of semi-implicit Euler scheme. Secondly, the provisional velocity is corrected to get a solenoidal velocity and the corresponding pressure field. After this the extra-stress equations are solved. Applications to popular benchmarks for viscoelastic flows with stationary boundaries and comparisons with experimental and numerical studies are presented. The results show that the developed LS-STAG method modification demonstrates an accuracy comparable to body-fitted methods. The obtained modification is implemented in the «LS-STAG» software package developed by the author. This software allows to simulate viscous incompressible flows around a moving airfoil of arbitrary shape or airfoils system with one or two degrees of freedom. For example, it allows to simulate rotors autorotation and airfoils system wind resonance. Intel® Cilk™ Plus, Intel® TBB and OpenMP parallel programming technologies are used in the «LS-STAG».

**Keywords:** Incompressible Flows; Viscoelastic Flows; Rate Type Viscoelastic Flow Models; Immersed Boundary Methods; the LS-STAG Method.

**DOI:** 10.15514/ISPRAS-2017-29(1)-5

**For citation:** Puzikova V. The LS-STAG Immersed Boundary Method Modification for Viscoelastic Flow Computations. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 29, issue 1, 2017, pp. 71-84 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2017-29(1)-5

## References

- [1]. Owens R.G., Phillips T.N. Computational Rheology. *London: Imperial College Press*, 2002. 417 p.
- [2]. Galdi G.P., Rannacher R., Robertson A.M., Turek S. Hemodynamical Flows: Modeling, Analysis and Simulation. *N. Y.: Springer*, 2008. 501 p.
- [3]. Kim J.M., Kim C., Kim J.H., Chung C., Ahn K.H., Lee S.J. High-resolution finite element simulation of 4:1 planar contraction flow of viscoelastic fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2005, no. 129, pp. 23–37.
- [4]. Mittal R., Iaccarino G. Immersed boundary methods. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2005, no. 37, pp. 239–261.
- [5]. Chen Y., Botella O. The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties. *J.Comp.Phys.*, 2010, no.229, pp.1043-1076.
- [6]. Osher S., Fedkiw R.P. Level set methods and dynamic implicit surfaces. *N. Y.: Springer*, 2003. 273 p.
- [7]. Puzikova V.V., Marchevsky I.K. Extension of the LS-STAG immersed boundary method for RANS-based turbulence models and its application for numerical simulation in coupled hydroelastic problems. *Proc. VI International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. Venice, 2015*, pp. 532–543.
- [8]. Puzikova V.V. On generalization of the LS-STAG immersed boundary method for Large Eddy Simulation and Detached Eddy Simulation. *Proc. Advanced Problems in Mechanics International Summer School-Conference. St.-Petersburg. 2015*, pp. 411-417.
- [9]. Marchevsky I., Puzikova V. Application of the LS-STAG Immersed Boundary Method for Numerical Simulation in Coupled Aeroelastic Problems. *Proc. 11th World Congress on Computational Mechanics, 5th European Conference on Computational Mechanics, 6th European Conference on Computational Fluid Dyn.* Barcelona, 2014, pp.1995-2006.
- [10]. Puzikova V.V. Realization of parallel computations in the software package «LS-STAG\_turb» for viscous incompressible flow simulation on systems with shared memory. *Trudy ISP RAN / Proc. ISP RAS*, vol. 28, issue 1, 2016, pp. 221-242 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2016-28(1)-13.
- [11]. Uilkinson U.L. Non-newtonian fluids. *Moscow: Мир*, 1964. 216 p. (in Russian)
- [12]. Maxwell J.C. On the dynamical theory of gases. *Philos. Trans. R. Soc.* 1867, no. 157, P. 49–88.
- [13]. Jeffreys H. The Earth Its Origin, History and Physical Constitution. *Cambridge: Cambridge University Press*, 1929. 612 p.
- [14]. Oldroyd J.G. On the formulation of rheological equations of state. *Proc. Roy. Soc. London.* 1950, no. 200, pp. 523–541.
- [15]. Johnson M.W., Segalman D. A model for viscoelastic fluid behavior which allows non-affine deformation. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 1977, no. 2, pp. 255–270.
- [16]. Intel® Cilk™ Plus. URL: <https://software.intel.com/ru-ru/node/522579> (accessed: 25.10.2015).
- [17]. Reinders J. Intel Threading Building Blocks: Outfitting C++ for Multi-Core Processor Parallelism. *Sebastopol: O'Reilly*, 2007. 336 p.
- [18]. Keiller R.A. Spatial decay of steady perturbations of plane Poiseuille flow for the Oldroyd-B equation. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 1993, vol. 46, pp. 129–142.
- [19]. Hayat T., Khan M., Ayub M. Exact solutions of flow problems of an Oldroyd-B fluid. *J. Applied Math. and Comp.* 2004, vol. 151, pp. 105–119.