

Система операторов для пространственно-временного анализа динамических сцен

¹ К.С. Петрищев <k_petrishchev@ispras.ru>

¹ В.А. Золотов <vladislav.zolotov@ispras.ru>

^{1,2,3} В.А. Семенов <sem@ispras.ru>

¹ Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН, 109004, Россия, г. Москва, ул. А. Солженицына, д. 25.

² Московский физико-технический институт, 141700, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

³ НИУ Высшая школа экономики, 101978, Россия, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20

Аннотация. В работе предлагается развитая система топологических, метрических, ориентационных и временных операторов для комплексного анализа пространственно-временных данных. Система допускает комбинированное использование методов количественного и качественного анализа, необходимых как для установления первичных фактов, так и для продукции новых знаний на основе установленных фактов. Система операторов представляется перспективной для решения задач пространственно-временного (4D) моделирования и планирования промышленных проектов и, в частности, для спецификации и обнаружения нетривиальных конфликтов в календарно-сетевых графиках проектов.

Ключевые слова: качественный анализ; пространственно-временной анализ; моделирование динамических сцен

DOI: 10.15514/ISPRAS-2018-30(6)-13

Для цитирования: Петрищев К.С., Золотов В.А., Семенов В.А. Система операторов для пространственно-временного анализа сцен. Труды ИСП РАН, том 30, вып. 6, 2018 г., стр. 237-258. DOI: 10.15514/ISPRAS-2018-30(6)-13

1. Введение

Стремительный рост объемов информации и необходимость ее всестороннего анализа приводят к развитию новых методов работы с многомерными и пространственно-временными данными. Класс приложений, в которых возникает необходимость поиска, анализа и визуализации больших пространственно-временных данных, чрезвычайно широк и охватывает системы компьютерной графики, анимации, робототехники, автоматизации

проектирования и производства, геоинформатики, визуального моделирования и планирования проектной деятельности. При этом сами данные часто представляются составными геометрическими моделями, что позволяет интерпретировать их как иерархически организованные сцены, состоящие из динамических многомерных объектов.

Для работы с такими данными довольно часто применяются средства качественного анализа (Qualitative Spatial Reasoning QSR), предназначенные для извлечения (продукции) новых знаний на основе установленных тем или иным способом фактов [1]. Несмотря на разнообразие имеющихся формальных систем анализа, наборы операторов не позволяют идентифицировать сложные пространственно-временные отношения между объектами. Существующие программные инструменты, такие как SparQ, GQR, QAT, CLP(QS), сфокусированы на анализе одного из аспектов и применимы в основном для интервального анализа временных рядов событий и продукции выводов о некоторых пространственных отношениях. На практике инструменты, как правило, применяются для анализа простых отношений в несложных сценах. Отсутствие интерфейсов ограничивает их комбинированное использование со средствами количественного анализа, необходимыми, например, для установления первичных фактов, и применение в рамках концепций 4D (пространственно-временного), 5D (пространственно-временного и стоимостного) и multi-D (многомерного) моделирования [2] [3].

Очевидно, что задачи анализа пространственно-временных данных вовсе не ограничиваются приведенными постановками, а их решение должно основываться на более развитом математическом аппарате, применимом к приложениям из разных предметных областей. По-видимому, такой аппарат должен обеспечивать комплексный анализ данных, предусматривать совместное использование методов качественного и количественного анализа, допускать применение к большим данным на основе развитых индексных структур. Вопросы индексирования иерархически организованных пространственно-временных данных, а также способы эффективного исполнения запросов к ним достаточно подробно рассматривались в работах [4] [5] [6] [7].

Настоящая статья адресована проблемам качественного и количественного анализа пространственно-временных данных и выработки общего математического аппарата для этих целей. На основе рассмотрения существующих формальных систем качественного анализа в статье описывается система топологических, метрических, ориентационных и временных операторов для комплексного анализа пространственно-временных данных. В разд. 2 дается обзор существующих популярных систем и формализмов, в разд. 3 подробно описываются предложенные группы операторов.

2. Обзор существующих формальных систем качественного анализа

Формальные системы качественного анализа (Qualitative Reasoning), как правило, основаны на интуитивных понятиях пространственных и временных отношений между физическими объектами окружающего мира [8]. Системы используют фиксированные наборы операторов для установления соответствующих фактов об объектах и вывода на основе них новых знаний. В отличие от количественного анализа (Quantitative Reasoning), основанного на точных числовых оценках взаимного расположения объектов в пространстве и времени, качественный анализ более естественен в использовании и проще в реализации. В ряде случаев он позволяет делать более быстрые выводы благодаря формализации в виде алгебр абстрактных отношений и их реализации с использованием символьных вычислений вместо трудоемких численных расчетов.

За последние три десятка лет было предложено большое число формальных алгебраических систем. Как правило, они ориентированы на пространственные или временные отношения и, тем самым, исключают возможность проведения комплексного анализа. Другим их принципиальным ограничением является невозможность получения первичных знаний об объектах сцены, которые часто доступны лишь в результате моделирования и проведения соответствующих численных расчетов. Данные недостатки суживают возможности применения формальных систем качественного анализа в промышленных приложениях. Тем не менее, они представляют несомненный интерес с точки зрения выбора базовых операторов и построения единой, функционально развитой системы для комплексного анализа пространственно-временных данных, представимых динамическими сценами пространственных объектов.

В данном разделе кратко остановимся на существующих формальных системах качественного анализа. Наиболее известными примерами временных исчислений являются интервальная алгебра Аллена [9], темпоральные модальные логики [10] и точечная алгебра Вилайна и Каутца [11]. Например, классическая алгебра Аллена строится на семи базовых отношениях, которые могут быть установлены между двумя интервалами на множестве рациональных чисел. С учетом обратных отношений общее число становится равным тринадцати. Данный формализм хорошо подходит для приложений, в которых парные события определяют состояния объектов сцены, например, появление и удаление, изменение положения и т.п.

Примерами популярных исчислений направлений служат система относительных ориентаций Франка и Фрексы [12, 13], система ориентированных точек (Oriented Point Relation Algebra, OPRA), DCC, FlipFlop, QTC, dipole or extended objects [14, 15]. К сожалению, данные системы применимы только для точечных объектов, поскольку строго сегментируются области возможного расположения основного объекта относительно точки расположения опорного объекта (см. рис. 1).

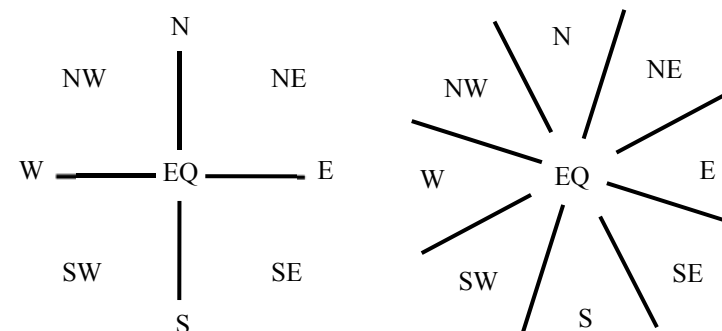


Рис.1 Системы отношений ориентаций Франка и Фрексы
Fig.1 Frank and Freksa's relative orientation calculi

Для объектов с протяженными границами наиболее распространенными являются алгебра прямоугольников Rectangle Algebra (RA) [16] и система главных направлений Cardinal Direction Calculus (CDC) [17, 18]. В алгебре прямоугольников границы опорного и основного объекта аппроксимируются минимальными ограничивающими прямоугольниками (minimum bounding rectangle (MBR)), а к их главным проекциям применяются отношения интервальной алгебры. В системе главных направлений аппроксимируются границы опорного объекта, а относительное расположение основного объекта определяется на основе тех же интервальных отношений.

Топологическими системами являются мереотопологическая система, системы исчисления пересечений 4-Intersection Calculus и 9-Intersection Calculus [19], системы исчисления связности областей RCC-5, RCC-8 (Region Connection Calculi, RCC) [20], RCC-3D (VRCC-3D++) [21]. Эти формальные системы популярны среди исследователей из-за их простоты и легкости имплементации [22, 23, 24].

На рис.2 приведены восемь возможных отношений связности RCC-8, которые могут быть установлены между двумя областями. Ниже они перечисляются с соответствующими принятыми аббревиатурами отношений:

- не связаны — disconnected (DC);
- связаны внешне — externally connected (EC);
- частично перекрыты — partial overlap (PO);
- равны — equal (EQ);
- первая область касается второй, находясь внутри — tangential proper part (TPP);
- вторая область касается первой, находясь внутри — tangential proper part inverse (TPPi);

- первая область лежит внутри второй — non-tangential proper part (NTPP);
- вторая область лежит внутри первой — non-tangential proper part inverse (NTPPi).

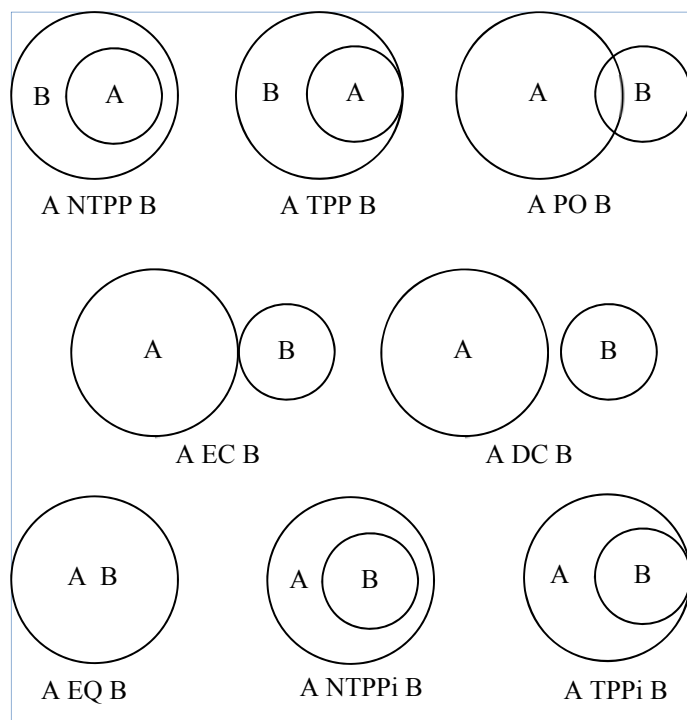


Рис.2 Система топологических операторов RCC-8
Fig.2 RCC-8 topological operators

Приведенные отношения являются попарно исключающими (pairwise disjoint), а сама система — исчерпывающей (jointly exhaustive) в том смысле, что любая физически реализуемая конфигурация областей может быть описана одним из отношений. При этом система не является избыточной и противоречивой, поскольку никакая пара областей не может быть описана более чем одним отношением. Отношения могут сочетаться друг с другом, например, касание областей может быть определено как объединение TPP и NTPP отношений.

Другой популярной системой является RCC-5, которая предполагает только пять базовых отношений, не различая случаи касаний областей. Две другие системы RCC-23 и RCC-62, предложенные позже, наоборот расширили набор отношений, что существенно повысило их наглядность, однако лишило возможности применения автоматических средств вывода.

В RCC-23 учитывается выпуклость областей. Анализ выпуклых и вогнутых областей различается, причем в системе отношений участвуют и их выпуклые оболочки. Базовые отношения отсутствия связанности DC (disconnected) и внешней связанности EC (externally connected) дополняются предикатами, определяющими находится ли область снаружи outside (O), частично внутри partially inside (P) или полностью внутри completely inside (I) другой области. Например, OOE отношение означает, что первая область лежит внутри выпуклой оболочки второй области, вторая — внутри выпуклой оболочки первой и обе области внешне связаны.

В системе RCC-62 области представляются своими границами (boundaries), внутренними частями (interiors), внешними частями (exteriors), а невыпуклые области — и смешанными частями (insides). 62 типа отношений порождается пересечением соответствующих частей представления. Очевидно, что чем больше типов отношений допускается системой анализа, тем больше пространственных конфигураций может быть описано.

К менее известным следует отнести систему исчисления измерений D-Calculus [25], систему исчисления положений Ternary Point Configuration Calculus [26], а также системы исчисления перекрытий (Occlusion Calculi, OCC), LOS-14, ROC-20, OCS-14.

Упомянутые выше системы ограничены для практического использования, поскольку оперируют только одним из пространственных аспектов. В связи с этим рядом авторов предприняты попытки обобщения и анализа пространственно-временных отношений. В основе систем STCC (SpatioTemporal Constraint Calculus) [27] и ARCC-8 лежит идея синтеза интервальной алгебры Аллена и топологических отношений RCC-8. Другим примером подобных обобщений является система исчисления траекторий Qualitative Trajectory Calculus (QTC), которая позволяет делать выводы о движущихся объектах [28].

3. Организация и состав системы для качественного и количественного анализа сцен

Поскольку одной из задач является разработка системы операторов для качественного и количественного пространственно-временного анализа сцен, рассмотренные выше формальные алгебраические системы могут служить основой для подобных построений. В разрабатываемой системе удобно выделить следующие группы операторов:

- временные;
- топологические;
- метрические;
- ориентационные.

Заметим, что реализация самих операторов может базироваться на численных расчетах, что не должно препятствовать их дальнейшему использованию при получении качественных оценок. Таким образом, для идентификации нетривиальных пространственно-временных конфликтов методы качественного и количественного анализа могут и должны применяться совместно.

Далее мы ограничимся семантикой этих операторов, опуская детали их возможной реализации. Формальные определения операторов и иллюстрации сведены в табл. 1-4.

3.1 Временные операторы

Прежде всего, заметим, что изменения в динамической сцене могут происходить как мгновенно в дискретные моменты времени, так и непрерывно на протяжении некоторых временных интервалов, концы которых явно или неявно задаются дискретными событиями. Поэтому выделим две группы временных операторов.

Табл. 1. Темпоральные операторы
Table 1. Temporal operators

Оператор	Формальное представление и иллюстрация
<i>Before</i> ($E1, E2$) $E1 < E2$	$E1.time < E2.time$
<i>AtOnce</i> ($E1, E2$) $E1 = E2$	$E1.time = E2.time$
<i>After</i> ($E1, E2$) $E1 > E2$	$E1.time > E2.time$
<i>Next</i> ($E1, E2$)	$neither E1.time \leq E2.time$ $nor \exists E3 E1.time > E3.time > E2.time$
<i>Previous</i> ($E1, E2$)	$neither E1.time \geq E2.time$ $nor \exists E3 E1.time < E3.time < E2.time$

<i>Fork</i> ($E1, E2$)	$\exists E3 E3.time < E1.time \wedge E3.time < E2.time$
<i>Independent</i> ($E1, E2$)	$neither \exists E1.time \wedge \exists E2.time$ $nor \exists E3 E1.time < E3.time < E2.time$
<i>Before</i> ($I1, I2$)	$I1.start < I1.end < I2.start < I2.end$
<i>Meets</i> ($I1, I2$)	$I1.start < I1.end = I2.start < I2.end$
<i>Overlaps</i> ($I1, I2$)	$I1.start < I2.start < I1.end < I2.end$
<i>Starts</i> ($I1, I2$)	$I1.start = I2.start < I1.end < I2.end$
<i>During</i> ($I1, I2$)	$I1.start < I2.start < I2.end < I1.end$
<i>Finishes</i> ($I1, I2$)	$I2.start < I1.start < I1.end = I2.end$
<i>AtOnce</i> ($I1, I2$)	$I1.start = I2.start < I1.end = I2.end$

Первая группа включает в себя операторы *Before*, *AtOnce*, *After*, *Next*, *Previous*, *Fork* и *Independent*, которые непосредственно применяются к событиям и

используются для того, чтобы определить, как пара или множество событий связаны друг с другом они. К примеру, можно узнать, произошло ли событие $E1$ до события $E2$ (*Before*), одновременно с ним (*AtOnce*) или после него (*After*). Дополнительные операторы *Next*, *Previous* помогают уточнить, случилось ли одно из этих событий сразу после другого или же какие-то события могли произойти между ними. Операторы *Fork* и *Independent* предназначены для идентификации случаев, когда у событий $E1$ и $E2$ общий предшественник $E3$ или их можно рассматривать как независимые во времени.

Вторая группа повторяет алгебру Аллена с тем отличием, что отношения определяются не между временными интервалами, а между парами событий, которые собственно и задают интервалы.

Например, пару событий $E1, E2$ (*Before*($E1, E2$)) можно ассоциировать с интервалом $I1=I(E1, E2)$, а события $E3, E4$ (*Before*($E3, E4$)) — с интервалом $I2=I(E3, E4)$ и отношения устанавливать непосредственно между $I1$ и $I2$.

Следующие операторы *Before*, *Meets*, *Overlaps*, *Starts*, *During*, *Finishes*, и *AtOnce* позволяют установить семь базовых отношения алгебры, которыми могут быть связаны два интервала $I1$ и $I2$. Формальные определения и графические иллюстрации операторов приводятся в табл. 1. Формальные параметры *start* и *end* здесь обозначают начало и конец соответствующих временных интервалов, которые задаются временными штампами ассоциируемых событий. Приведенный набор операторов является достаточно развитым для анализа сложных сцен.

3.2 Метрические операторы и функции измерения

Довольно часто в анализе сцен участвуют геометрические свойства твердых тел, такие как диаметр, площадь поверхности, объем, центр масс и проекции тел на плоскости. Для объектов, граничное представление которых задается простыми геометрическими формами, подобные свойства рассчитываются аналитически. В общем случае это не так, поэтому на практике используется упрощенное полиэдральное представление, полученное в результате аппроксимации (tessellation) исходной геометрии и допускающее подсчет требуемых характеристик. Независимо от способов вычислений будем считать, что для твердых объектов сцены определены функции подсчета диаметра *Diameter*(A), площади поверхности *Area*(A), объема *Volume*(A), центра масс *CentreOfMass*(A) и проекции на заданную плоскость *Projection*(A, D), определяемую нормалью D . Также следует предусмотреть функцию *Distance*(A, B) для расчета расстояния между объектами A, B и функцию *Depth*(A, B) для определения глубины взаимопроникновения, т.е. расстояния, на которое твердые объекты A, B перекрывают друг друга.

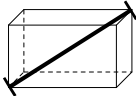
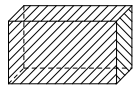
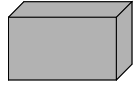
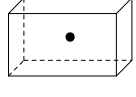
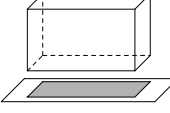
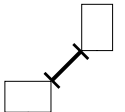
Специальные метрические операторы *CloserThan*(A, B, C) and *FartherThan*(A, B, C) позволяют определить, какой из двух объектов A, B находится ближе к третьему объекту C и какой из A, B находится дальше от C .

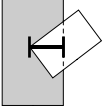
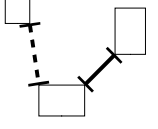
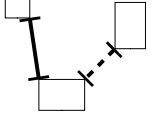
Эти операторы, как правило, используются в тех случаях, когда вердикт может быть получен сравнительно быстро с использованием качественных оценок. Графические иллюстрации, поясняющие данные функции и операторы приведены в табл. 2.

Поскольку положение объектов в сцене и их геометрическое представление подвержены изменениям с течением времени, все перечисленные измерения выполняются для определенного фиксированного момента времени, называемого в дальнейшем модельным временем (focus time) T . Модельное время T является неявным параметром приведенных выше операторов и функций. В дальнейшем в случаях, когда требуется подчеркнуть зависимость от времени, параметр T включается в сигнатуру явно.

Табл. 2. Метрические операторы и функции измерения

Table 2. Metric operators and measurement functions

Функции и операторы	Иллюстрация
<i>Diameter</i> (A)	
<i>Area</i> (A)	
<i>Volume</i> (A)	
<i>CentreOfMass</i> (A)	
<i>Projection</i> (A, D)	
<i>Distance</i> (A, B)	


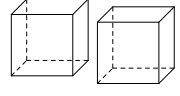
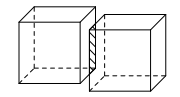
<i>Depth</i> (A, B)	
<i>CloserThan</i> (A, B, C)	
<i>FartherThan</i> (A, B, C)	


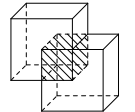
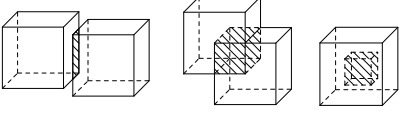
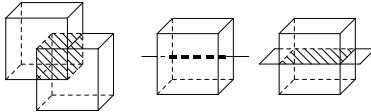
3.3 Топологические операторы

Определяется набор топологических операторов, который, в определенной степени, основывается на формальных системах топологических отношений, рассмотренных в обзорном разделе. Выбор операторов обусловлен необходимостью вычислительно эффективной реализации и возможностью их применения при выводе качественных суждений. В таблице 3 приведены формальные определения и иллюстрации для каждого из операторов набора.

Табл. 3. Топологические операторы

Table 3. Topological operators

Оператор 9IM	Формализация и иллюстрация отношения
<i>Equal</i> (A, B) $\begin{bmatrix} * & F & F \\ F & * & F \\ F & F & * \end{bmatrix}$	$\sim A^0 \partial B \wedge \sim A^0 B^- \wedge \sim \partial A B^0 \wedge \sim \partial A B^- \wedge \sim A^- B^0 \wedge A^- \partial B$ 
<i>Disjoint</i> (A, B) $\begin{bmatrix} F & F & * \\ F & F & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$	$\sim A^0 B^0 \wedge \sim \partial A B^0 \wedge \sim A^0 \partial B \wedge \sim \partial A \partial B$ 
<i>Touches</i> (A, B) $\begin{bmatrix} F & F & * \\ F & T & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$	$\sim A^0 B^0 \wedge \sim \partial A B^0 \wedge \sim A^0 \partial B \wedge \partial A \partial B$ 

<i>Within</i> (A, B) $\begin{bmatrix} * & * & F \\ * & F & F \\ * & * & * \end{bmatrix}$	$\sim A^0 B^- \wedge \sim \partial A \partial B \wedge \sim \partial A B^-$ 
<i>Contains</i> (A, B) $\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & F & * \\ F & F & * \end{bmatrix}$	$\sim \partial A \partial B \wedge \sim A^- B^0 \wedge \sim A^- \partial B$ <i>Within</i> (B, A)
<i>Overlaps</i> (A, B) $\begin{bmatrix} 3 & * & T \\ * & * & * \\ T & * & * \end{bmatrix}$	$A^0 B^0 \wedge A^- B^0 \wedge A^0 B^-$ 
<i>Intersects</i> (A, B)	$A^0 B^0 \vee \partial A B^0 \vee A^0 \partial B \vee \partial A \partial B$ <i>Not Disjoint</i> (A, B) 
<i>Clashes</i> (A, B)	$A^0 B^0 \vee \partial A B^0 \vee A^0 \partial B$ 

Предложенный набор отчасти повторяет известную пространственно-расширенную модель, основанную на девяти пересечениях (Dimensionally Extended nine-Intersection Model, DE-9IM) и предназначенную для качественного анализа геометрических объектов, для которых определена внутренность, граница и наружная часть. В нотации топологических пространственных операторов эти области обозначаются как A^0 , ∂A , и A^- соответственно. Модель абстрактно описывает геометрические объекты через их возможные отношения друг с другом, используя матрицы размера 3×3 , называемые матрицами пересечения. Для объектов A и B элементы матрицы хранят максимальную размерность пересечений их областей:

$$\begin{bmatrix} \dim A^0 \cap B^0 & \dim A^0 \cap \partial B & \dim A^0 \cap B^- \\ \dim \partial A \cap B^0 & \dim \partial A \cap \partial B & \dim \partial A \cap B^- \\ \dim A^- \cap B^0 & \dim A^- \cap \partial B & \dim A^- \cap B^- \end{bmatrix}$$

Размерность пустого множества далее обозначается как F (false), непустого — как T (true) или более конкретно: 0 для точек, 1 для линий, 2 для поверхностей и 3 для объемов.

Основные различия между предложенным набором операторов и моделью DE-9IM заключаются в следующем:

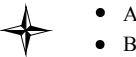


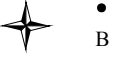


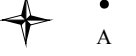


- понятия точек, линий и поверхностей интерпретируются в терминах общей топологии, т.е. как имеющие границу, но не имеющие внутренности;
- геометрические объекты предполагаются замкнутыми и ограниченными, при этом они могут состоять из нескольких несвязанных частей;
- операторы предназначены для двумерных и трехмерных геометрических объектов;
- операторы и соответствующие топологические отношения формализованы с использованием оригинальных матриц пересечения;
- операторы применяются для анализа объектов сцены на текущее модельное время.

3.4 Операторы направленности (относительного положения)

Направление – бинарное отношение между упорядоченной парой объектов A и B в заданной системе отсчета, где A – исходный объект, а B – целевой объект. В случае точечных объектов для качественного анализа обычно применяют модель кардинальных направлений Франка [29] или, так называемую, звездчатую модель [30]. В двухмерном случае обе модели используют разбиение плоскости на угловые сегменты, с общей вершиной в исходном объекте A и сторонами, опирающимися на линии запад-восток и юг-север. В зависимости от линии или сегмента, которым может принадлежать целевой объект B , фиксируется девять отношений расположения объекта B относительно объекта A (см. таблицу 4). Однако у обеих моделей есть принципиальные недостатки: в трехмерном случае значительно вырастает число отношений, а в случае объектов с протяженными границами возникают неопределенности.

Чтобы преодолеть первый недостаток и избавиться от необходимости поддержки огромного числа отношений, можно ввести обобщенное отношение и параметризовать его с помощью дополнительного операнда, задающего вектор направления, относительно которого следует определять статус относительного расположения объектов. Второй недостаток носит более фундаментальный характер, поскольку в случае протяженных границ идентификация взаимного расположения объектов становится нетривиальной и требует определения отношения направленности иным образом.

Табл. 4. Модель кардинальных направлений Франка
Таблица 4. Frank's cardinal direction model

Отношение и формализация	Иллюстрация
$NorthOf(A, B)$ $A_x = B_x \wedge A_y > B_y$	
$NorthEastOf(A, B)$ $A_x > B_x \wedge A_y > B_y$	
$EastOf(A, B)$ $A_x > B_x \wedge A_y = B_y$	
$SouthEastOf(A, B)$ $A_x > B_x \wedge A_y < B_y$	
$SouthOf(A, B)$ $A_x = B_x \wedge A_y < B_y$	
$SouthWestOf(A, B)$ $A_x < B_x \wedge A_y < B_y$	
$WestOf(A, B)$ $A_x < B_x \wedge A_y = B_y$	
$NorthWestOf(A, B)$ $A_x < B_x \wedge A_y > B_y$	
$Equal(A, B)$ $A_x = B_x \wedge A_y = B_y$	

На рис. 3 представлено несколько характерных случаев, в которых идентификация отношений направленности между основным объектом A и другими объектами сцены B, C, D, E затруднена и требует формализации, отличающейся от той, которая применяется для точечных объектов. Следует отметить, что ранее предпринимались попытки работы с подобными объектами [31]. В их основе обычно лежит идея сепарации объектов плоскостью, перпендикулярной заданному направлению. Если удастся провести такую плоскость, то устанавливается строгое отношение направленности расположения объектов. Если сепарирующая плоскость может быть проведена только для отдельных частей объектов, то устанавливается, так называемое, нестрогое (релаксируемое) отношение. Во всех остальных случаях отношение не определено.

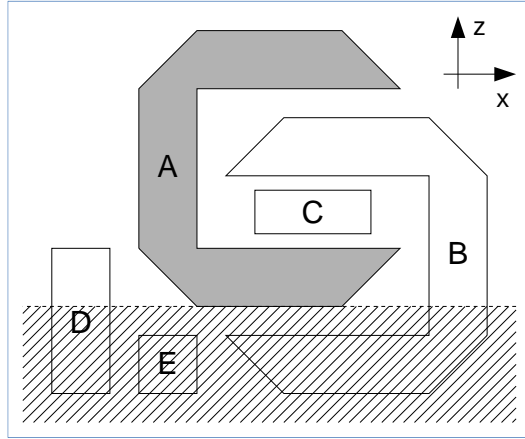


Рис.3 Сцена с неопределенностями в отношениях между объектами
Figure 3 A scene with uncertain relations between objects

Построение сепарирующей плоскости также допускает альтернативы. Обычно используются модели, использующие проекции (projection-based model) и полупространства (halfspace-based model). В первой модели исходный объект протягивается в заданном направлении и ищется пересечение с целевым объектом. Во второй модели строится ограничивающий параллелепипед AABV (Axis Aligned Bounding Box) основного объекта и определяется местоположение второго объекта в политапах, образуемых плоскостями ограничивающего параллелепипеда.

Для примера рассмотрим систему отношений *LeftOf*, *RightOf*, *BackOf*, *FrontOf*, *Above*, *Below*. Для краткости ограничимся формальными определениями отношения *Above*. Другие типы отношений определяются аналогично.

Пусть A и B — объекты в трехмерном евклидовом пространстве (твердые тела, поверхности, кривые и точки), а $a \in A$, $b \in B$ — точки, принадлежащие объектам A и B соответственно.

Определение 1. (Полупространственная модель, нестрогая интерпретация отношения)

$$Above(A, B) \Leftrightarrow \forall a: \exists b: a_z < b_z$$

Определение 2. (Полупространственная модель, строгая интерпретация отношения)

$$Above(A, B) \Leftrightarrow \forall a, b: a_z < b_z$$

Определение 3. (Проекционная модель, нестрогая интерпретация отношения)

$$Above(A, B) \Leftrightarrow \exists a, b: a_x = b_x \wedge a_y = b_y \wedge a_z < b_z$$

Определение 4. (Проекционная модель, строгая интерпретация отношения)

$$Above(A, B) \Leftrightarrow \forall a: (\exists b: a_x = b_x \wedge a_y = b_y \wedge a_z < b_z) \wedge (\nexists b: a_x = b_x \wedge a_y = b_y \wedge a_z \geq b_z)$$

Вернемся к рис. 3. Согласно приведенным определениям идентификация отношений направленности может существенно различаться в зависимости от принятой модели и строгости интерпретации. Например, в рамках проекционной модели объекты B и E лежат ниже объекта A при нестрогой интерпретации отношения, и только объект E лежит ниже объекта A при строгой интерпретации отношения. Применяя полупространственную модель, объекты B, D, E лежат ниже объекта A при нестрогой интерпретации, и только объект E лежит ниже объекта A при строгой интерпретации.

Табл. 5. Отношения направленности в обобщенной форме

Table 5. Directional relations

Отношение	Формализация
<i>InDirectionOf</i> (A, B, D)	$\forall b \in B \exists a \in A: (\bar{a} \cdot \bar{D}) > (\bar{b} \cdot \bar{D})$
<i>StrictlyInDirectionOf</i> (A, B, D)	$\forall a \in A, b \in B: (\bar{a} \cdot \bar{D}) > (\bar{b} \cdot \bar{D})$

Вместо определения базовых отношений *LeftOf*, *RightOf*, *BackOf*, *FrontOf*, *Above*, *Below* и дополнительных отношений, порождаемых произвольно выбранными ограничивающими параллелепипедами OBB (Oriented Bounding Box), определим отношения направленности в обобщенной форме. Для этого используем дополнительный операнд D , обозначающий направление, в котором ведется проверка отношения. Задавая направление D , можно смоделировать частные типы отношений.

Формальные определения обобщенных отношений в нестрогой и строгой интерпретациях приводятся в таблице 5. Скалярные и векторные произведения двух векторов, заданные точкой $a \in A$ и направлением D здесь и в дальнейшем обозначаются как $(\bar{a} \cdot \bar{D})$ и $\bar{a} \times \bar{D}$ соответственно. Первое отношение *InDirectionOf* — слабая форма, обладающая свойством транзитивности. Второе отношение *StrictlyInDirectionOf* — строгая форма, оно транзитивно, иррефлексивно и ассиметрично. Это просто понять, если зафиксировать направление D , к примеру, вертикально вверх. В этом случае приведенные формальные условия редуцируются к частным определениям 1,2, рассмотренным ранее. При обобщениях можно было бы основываться и на проекционной модели таким образом, чтобы частные условия совпали с определениями 3,4. Однако это представляется избыточным для обсуждаемых моделей пространственно-временных конфликтов.

3.5 Комбинирование операторов

Операторы рассмотренных видов допускают совместное использование (комбинирование), что обеспечивает задание сложных пространственно-временных условий. Для этого пространственные операторы

интерпретируются в терминах временных событий и интервалов, на протяжении которых они принимают истинное значение. Действительно, при моделировании динамических сцен пространственные отношения между объектами возникают только во временном контексте. Например, чтобы описать конфликт, обусловленный пересечением двух движущихся пространственных объектов $A(t)$, $B(t)$ на некотором временном интервале T можно воспользоваться следующей конструкцией:

$$\text{Clashes}(A, B) \vee \text{Overlaps}(T) \Leftrightarrow \\ \exists t \in T \text{ Clashes}(A(t), B(t))$$

Условие бесконфликтности перемещения объектов на интервале T тогда приобретает вид:

$$\neg \text{Clashes}(A, B) \vee \text{During}(T) \Leftrightarrow \\ \forall t \in T \neg \text{Clashes}(A(t), B(t))$$

Для комбинирования нескольких пространственных или временных условий используются обычные логические операторы. Например, условие устойчивости пирамидальной конструкции, состоящей из пространственных объектов A , B , C , можно представить следующим образом:

$$\text{Above}(A, B) \vee \text{Above}(B, C)$$

Условие нарушения устойчивости конструкции тогда приобретает вид

$$\neg \text{Above}(A, B) \wedge \neg \text{Above}(B, C)$$

Пространственные и временные операторы широко применяются в специализированных СУБД. В работе [31] описывается пространственное расширение языка запросов SQL, обеспечивающее содержательную работу с информационными моделями зданий и сооружений. В работах [32] и [33] описываются реализации СУБД, учитывающие как пространственный, так и временной аспект работы с данными. Тем не менее, реализации имеют ряд ограничений, связанных с дискретным по времени представлением пространственных объектов (snapshots). Ограничения не являются принципиальными для типовых геоинформационных приложений, однако оказываются критичными для моделирования динамических сцен с непрерывно перемещаемыми объектами. Более развитые инструменты для качественного пространственно-временного анализа представлены в статье [34], авторы которой также попытались доработать язык SQL.

В [27] делаются теоретические выводы относительно совместного применения интервальной алгебры Аллена и системы топологических отношений RCC-8 без учета других пространственных отношений. Мюллер [35] попытался построить формальную модель для пространственно-временных регионов на основе RCC-8, в дальнейшем доработанную Дэвисом [36].

Приведенные работы показывают, что существующие формальные системы имеют серьезные ограничения для качественного пространственно-временного анализа. Предложенная в данной статье система операторов, наоборот, является

довольно развитой и при этом допускает содержательное комбинирование пространственных и временных операторов.

4. Заключение

Таким образом, проведен обзор существующих формальных систем качественного анализа. На его основе предложена развитая система топологических, метрических, ориентационных и временных операторов для комплексного анализа пространственно-временных данных. Система допускает комбинированное использование методов количественного и качественного анализа, необходимых как для установления первичных фактов, так и для продукции новых знаний на основе установленных фактов. Система операторов представляется перспективной для решения задач 4D моделирования промышленных проектов и, в частности, для идентификации нетривиальных пространственных конфликтов в календарно-сетевых графиках.

Список литературы

- [1]. C. Freksa. Spatial computing. Cognitive and Linguistic Aspects of Geographic Space, Heidelberg, Springer Berlin, 2013, pp. 23-42.
- [2]. D. Heesom, L. Mahdjoubi. Trends of 4D CAD applications for construction planning. Construction Management and Economics, vol. 22, 2004, pp. 171-182.
- [3]. M.L.A.E. Borges, I.C. de Souza, S. Melo, J.P. Giesta. 4D Building Information Modelling: A Systematic Mapping Study. In Proc. of the 35th International Symposium on Automation and Robotics in Construction, Berlin, 2018.
- [4]. В. Золотов, В. Семенов. Современные методы поиска и индексации многомерных данных в приложениях моделирования больших динамических сцен. Труды ИСП РАН, т. 24, 2013 г., стр. 381-416. DOI: 10.15514/ISPRAS-2013-24-17.
- [5]. V. Semenov, K. Kazakov, S. Morozov, O. Tarlapan, V. Zolotov, T. Dengenis. 4D modeling of large industrial projects using spatio-temporal decomposition. In eWork and eBusiness in Architecture, Engineering and Construction, 2010, pp. 89-95.
- [6]. Золотов В.А., Семенов В.А. Исследование и развитие метода декомпозиции для анализа больших пространственных данных. Труды ИСП РАН, том 25, 2013 г., стр. 121-166. DOI: 10.15514/ISPRAS-2013-25-8.
- [7]. Золотов В.А., Семенов В.А. Перспективные схемы пространственно-временной индексации для визуального моделирования масштабных промышленных проектов. Труды ИСП РАН, том 26, вып. 2, 2014 г., стр. 175-196. DOI: 10.15514/ISPRAS-2014-26(2)-8.
- [8]. A.G. Cohn, S.M. Hazarika. Qualitative Spatial Representation and Reasoning: An Overview. Fundamenta Informaticae, vol. 46, № 1-2, 2001, pp. 1-29.
- [9]. J.F. Allen. Maintaining knowledge about temporal intervals. Communications of the ACM, vol. 26, issue 11, 1983, pp. 832-843.
- [10]. E.A. Emerson. Chapter 16 - Temporal and Modal Logic. In Handbook of Theoretical Computer Science, B: Formal Models and Semantics, Elsevier, 1990, pp. 995-1072.
- [11]. M.B. Vilain, H. Kautz. Constraint Propagation Algorithms for Temporal Reasoning. In Proc. of the 5th National Conference on Artificial Intelligence, 1986, pp. 377-382.
- [12]. A.U. Frank. Qualitative spatial reasoning about distances and directions in geographic space. Journal of Visual Languages & Computing, vol. 3, № 4, 1992, pp. 343-371.

- [13]. C. Freksa. Using orientation information for qualitative spatial reasoning. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 639, 1992, pp. 162-178.
- [14]. G.F. Ligozat. Qualitative triangulation for spatial reasoning. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 716, 1993, pp. 54-68.
- [15]. R. Moratz, J. Renz, D. Wolter. Qualitative Spatial Reasoning About Line Segments. In *Proc. of the 14th European Conference on Artificial Intelligence*, 2000, pp. 234-238.
- [16]. P. Balbiani, J.-F. Condotta, L.F. del Cerro. A new tractable subclass of the rectangle algebra. In *Proc. of the 16th International joint conference on Artificial Intelligence*, vol. 1, 1999, pp. 442-447.
- [17]. R.K. Goyal, M.J. Egenhofer. Similarity of cardinal directions. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2121, 2001, pp. 36-55.
- [18]. S. Skiadopoulos, M. Koubarakis. On the consistency of cardinal direction constraints. *Artificial Intelligence*, vol. 163, № 1, 2005, pp. 91-135.
- [19]. M.J. Egenhofer, R.D. Franzosa. Point-set topological spatial relations. *International Journal of Geographical Information Systems*, vol. 5, № 2, 1991, pp. 161-174.
- [20]. D. A. Randell, Z. Cui, A. G. Cohn. A spatial logic based on regions and connection. In *Proc. of the 1st International Conference Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, 1992, стр. 165-176.
- [21]. N. Elloe. VRCC-3D+: Qualitative spatial and temporal reasoning in 3 dimensions. PhD Thesis, Missouri University of Science and Technology, 2015.
- [22]. A.G. Cohn, J. Renz. Qualitative Spatial Representation and Reasoning. In *Handbook of Knowledge Representation*, Elsevier, 2008, pp. 551-596.
- [23]. M.J. Egenhofer, J. Sharma, D.M. Mark. A Critical Comparison of the 4-Intersection and 9-Intersection Models for Spatial Relations: Formal Analysis. In *Proc. of the International Research Symposium on Computer-based Cartography, AutoCarto 11*, 1993, pp. 1-12.
- [24]. T. Mossakowski, R. Moratz. Qualitative Reasoning about Relative Direction of Oriented Points. *Artificial Intelligence*, vol. 180-181, 2012, pp. 34-45.
- [25]. K. Zimmermann. Measuring without measures the D-calculus. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 988, 1995, pp. 59-67.
- [26]. R. Moratz, B. Nebel, C. Freksa. Qualitative spatial reasoning about relative position. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2685, 2002, pp. 385-400.
- [27]. A. Gerevini, B. Nebel. Qualitative Spatio-Temporal Reasoning with {RCC-8} and Allen's Interval. In *Proc. of the 15th European Conference on Artificial Intelligence, ECAI'2002*, 2002, pp. 312-316.
- [28]. N. Van de Weghe, A. Cohn, G. De Tre, P. De Maeyer. A qualitative trajectory calculus as a basis for representing moving objects in geographical information systems. *Control and Cybernetics*, vol. 35, № 1, 2006, pp. 97-119.
- [29]. A. Frank. Qualitative Spatial Reasoning: Cardinal Directions as an Example. *International Journal of Geographical Information Systems*, vol. 10, issue 3, 1996, pp. 269-290.
- [30]. J. Renz, D. Mitra. Qualitative Direction Calculi with Arbitrary Granularity. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3157, 2004, pp. 65-74.
- [31]. A. Borrmann, E. Rank. Query support for BIMs using semantic and spatial conditions. In *Handbook of Research on Building Information Modeling and Construction Informatics: Concepts and Technologies*, IGI Global, 2009, pp. 405-450.
- [32]. A. Carvalho, C. Ribeiro, A. Augusto de Sousa. A Spatio-temporal Database System Based on TimeDB and Oracle Spatial. *Research and Practical Issues of Enterprise Information Systems, IFIP International Federation for Information Processing*, vol. 205, 2006, pp. 11-20, Boston, MA, Springer US.

- [33]. C. Xinmin Chen, C. Zaniolo. SQLST : A Spatio-Temporal Data Model and Query Language. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 1920, 2000, pp. 96-111.
- [34]. M. Erwig, M. Schneider. Developments in spatio-temporal query languages. In *Proc. of the Tenth International Workshop on Database and Expert Systems Applications, DEXA 99*, 1999, pp. 441-449.
- [35]. P. Muller. A Qualitative Theory of Motion Based on Spatio-Temporal Primitives. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR '98)*, 1998, pp. 131-141.
- [36]. E. Davis. Describing spatial transitions using mereotopological relations over histories. *Technical Report #2000-809*, New York University, 2000.

A system of operators for spatial-temporal analysis of dynamic scenes

¹ K.S. Petrishchev <k_petrishchev@ispras.ru>

¹ V.A. Zolotov <vladislav.zolotov@ispras.ru>

^{1,2,3} V.A. Semenov <sem@ispras.ru>

¹ *Ivannikov Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences, 25, Alexander Solzhenitsyn st., Moscow, 109004, Russia*

² *Moscow Institute of Physics and Technology (State University), 9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia*

³ *National Research University, Higher School of Economics 20, Myasnitskaya Ulitsa, Moscow, 101978, Russia*

Abstract. The rapid growth in the volume of information and the need for its comprehensive analysis lead to the development of new methods of working with multidimensional and space-time data. To work with such data, Qualitative Spatial Reasoning is often used to extract (produce) new knowledge based on facts established in one way or another. Despite the variety of formal analysis systems available, sets of operators do not allow for the identification of complex space-time relationships between objects. Existing software tools, such as SparQ, GQR, QAT, CLP (QS), are focused on analyzing one aspect and are applicable mainly for interval analysis of time series of events and production of conclusions about some spatial relationships. In practice, tools are usually used to analyze simple relationships in simple scenes. The lack of interfaces limits their combined use with quantitative analysis tools, necessary, for example, to establish primary facts, and use within the framework of the concepts of 4D (space-time), 5D (space-time and cost) and multi-D (multidimensional) modeling. This paper proposes a system of topological, metric, directional and temporal operators for complex spatial-temporal analysis of dynamic scenes. This system allows combined usage of qualitative and quantitative analysis methods, which is essential not only for determining initial facts, but also for producing new knowledge based on these facts. The system of operators proposed is deemed prospective for problems of spatial-temporal (4D) modeling and planning of industrial projects, and particularly for specifying and detecting of non-trivial conflicts in project schedules.

Keywords: qualitative reasoning; spatial-temporal reasoning; dynamic scene modeling.

DOI: 10.15514/ISPRAS-2018-30(6)-13

For citation: Petrishchev K.S., Semenov V.A., Zolotov V.A. A system of operators for spatial-temporal scene analysis. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 30, issue 6, 2018, pp. 237-258 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2018-30(6)-13

References

- [1]. C. Freksa. Spatial computing. Cognitive and Linguistic Aspects of Geographic Space, Heidelberg, Springer Berlin, 2013, pp. 23-42.
- [2]. D. Heesom, L. Mahdjoubi. Trends of 4D CAD applications for construction planning. *Construction Management and Economics*, vol. 22, 2004, pp. 171-182.
- [3]. M.L.A.E. Borges, I.C. de Souza, S. Melo, J.P. Giesta. 4D Building Information Modelling: A Systematic Mapping Study. In *Proc. of the 35th International Symposium on Automation and Robotics in Construction*, Berlin, 2018.
- [4]. V. Zolotov, V. Semenov. Modern search and indexing methods for multi-dimensional data in modelling large-scale dynamic scene applications. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 24, 2013, pp. 381-416 (in Russian).
- [5]. V. Semenov, K. Kazakov, S. Morozov, O. Tarlapan, V. Zolotov, T. Dengenis. 4D modeling of large industrial projects using spatio-temporal decomposition. In *eWork and eBusiness in Architecture, Engineering and Construction*, 2010, pp. 89-95.
- [6]. V. Zolotov, V. Semenov. On application of spatial decomposition method for large data sets indexing. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 25, 2013, pp. 121-166 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2013-25-8.
- [7]. V. Zolotov, V. Semenov. Prospective schemes of temporal-spatial indexing for visual modeling. *Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS*, vol. 26, issue 2, 2014, pp. 175-196 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2014-26(2)-8.
- [8]. A.G. Cohn, S.M. Hazarika. Qualitative Spatial Representation and Reasoning: An Overview. *Fundamenta Informaticae*, vol. 46, № 1-2, 2001, pp. 1-29.
- [9]. J.F. Allen. Maintaining knowledge about temporal intervals. *Communications of the ACM*, vol. 26, issue 11, 1983, pp. 832-843.
- [10]. E.A. Emerson. Chapter 16 - Temporal and Modal Logic. In *Handbook of Theoretical Computer Science, B: Formal Models and Semantics*, Elsevier, 1990, pp. 995-1072.
- [11]. M.B. Vilain, H. Kautz. Constraint Propagation Algorithms for Temporal Reasoning. In *Proc. of the 5th National Conference on Artificial Intelligence*, 1986, pp. 377-382.
- [12]. A.U. Frank. Qualitative spatial reasoning about distances and directions in geographic space. *Journal of Visual Languages & Computing*, vol. 3, № 4, 1992, pp. 343-371.
- [13]. C. Freksa. Using orientation information for qualitative spatial reasoning. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 639, 1992, pp. 162-178.
- [14]. G.F. Ligozat. Qualitative triangulation for spatial reasoning. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 716, 1993, pp. 54-68.
- [15]. R. Moratz, J. Renz, D. Wolter. Qualitative Spatial Reasoning About Line Segments. In *Proc. of the 14th European Conference on Artificial Intelligence*, 2000, pp. 234-238.
- [16]. P. Balbiani, J.-F. Condotta, L.F. del Cerro. A new tractable subclass of the rectangle algebra. In *Proc. of the 16th International joint conference on Artificial Intelligence*, vol. 1, 1999, pp. 442-447.
- [17]. R.K. Goyal, M.J. Egenhofer. Similarity of cardinal directions. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2121, 2001, pp. 36-55.
- [18]. S. Skiadopoulos, M. Koubarakis. On the consistency of cardinal direction constraints. *Artificial Intelligence*, vol. 163, № 1, 2005, pp. 91-135.

- [19]. M.J. Egenhofer, R.D. Franzosa. Point-set topological spatial relations. *International Journal of Geographical Information Systems*, vol. 5, № 2, 1991, pp. 161-174.
- [20]. D. A. Randell, Z. Cui, A. G. Cohn. A spatial logic based on regions and connection. In *Proc. of the 1st International Conference Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, 1992, стр. 165-176.
- [21]. N. Elou. VRCC-3D+: Qualitative spatial and temporal reasoning in 3 dimensions. PhD Thesis, Missouri University of Science and Technology, 2015.
- [22]. A.G. Cohn, J. Renz. Qualitative Spatial Representation and Reasoning. In *Handbook of Knowledge Representation*, Elsevier, 2008, pp. 551-596.
- [23]. M.J. Egenhofer, J. Sharma, D.M. Mark. A Critical Comparison of the 4-Intersection and 9-Intersection Models for Spatial Relations: Formal Analysis. In *Proc. of the International Research Symposium on Computer-based Cartography, AutoCarto 11*, 1993, pp. 1-12.
- [24]. T. Mossakowski, R. Moratz. Qualitative Reasoning about Relative Direction of Oriented Points. *Artificial Intelligence*, vol. 180-181, 2012, pp. 34-45.
- [25]. K. Zimmermann. Measuring without measures the D-calculus. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 988, 1995, pp. 59-67.
- [26]. R. Moratz, B. Nebel, C. Freksa. Qualitative spatial reasoning about relative position. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2685, 2002, pp. 385-400.
- [27]. A. Gerevini, B. Nebel. Qualitative Spatio-Temporal Reasoning with {RCC-8} and Allen's Interval. In *Proc. of the 15th European Conference on Artificial Intelligence, ECAI'2002*, 2002, pp. 312-316.
- [28]. N. Van de Weghe, A. Cohn, G. De Tre, P. De Maeyer. A qualitative trajectory calculus as a basis for representing moving objects in geographical information systems. *Control and Cybernetics*, vol. 35, № 1, 2006, pp. 97-119.
- [29]. A. Frank. Qualitative Spatial Reasoning: Cardinal Directions as an Example. *International Journal of Geographical Information Systems*, vol. 10, issue 3, 1996, pp. 269-290.
- [30]. J. Renz, D. Mitra. Qualitative Direction Calculi with Arbitrary Granularity. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3157, 2004, pp. 65-74.
- [31]. A. Borrmann, E. Rank. Query support for BIMs using semantic and spatial conditions. In *Handbook of Research on Building Information Modeling and Construction Informatics: Concepts and Technologies*, IGI Global, 2009, pp. 405-450.
- [32]. A. Carvalho, C. Ribeiro, A. Augusto de Sousa. A Spatio-temporal Database System Based on TimeDB and Oracle Spatial. *Research and Practical Issues of Enterprise Information Systems, IFIP International Federation for Information Processing*, vol. 205, 2006, pp. 11-20, Boston, MA, Springer US.
- [33]. C. Xinmin Chen, C. Zaniolo. SQLST : A Spatio-Temporal Data Model and Query Language. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 1920, 2000, pp. 96-111.
- [34]. M. Erwig, M. Schneider. Developments in spatio-temporal query languages. In *Proc. of the Tenth International Workshop on Database and Expert Systems Applications, DEXA 99*, 1999, pp. 441-449.
- [35]. P. Muller. A Qualitative Theory of Motion Based on Spatio-Temporal Primitives. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR '98)*, 1998, pp. 131-141.
- [36]. E. Davis. Describing spatial transitions using mereotopological relations over histories. Technical Report #2000-809, New York University, 2000.