

## Разработка модельной реализации функций Бесселя из стандарта LSB

А. В. Пономаренко

Московский физико-технический институт (государственный университет),  
Институтский переулок, 9, г. Долгопрудный, Московская область, Россия  
E-mail: 375susnin@mail.ru

### Аннотация

В работе рассматривается модельная реализация функций Бесселя, входящих в состав интерфейсов, описанных в стандарте Linux Standard Base (LSB) [1]. Функции Бесселя играют важную роль в решении задач математической физики и широко применяются в электротехнике и радиотехнике.

Цель работы состоит в создании реализации функций Бесселя, позволяющей проверить все свойства данных функций: тщательно проанализировать точность возвращаемых значений, проконтролировать значения функций в особых точках и в их окрестностях, их поведение на участках монотонности и асимптотику.

Существует большое число методов вычисления функций Бесселя, которые позволяют получать значения функций в различных областях значений аргументов. Однако ни один метод не даёт нужной для тестирования точности вычисления на всей области определения. В модельной реализации применяется комбинация из наиболее эффективных методов, которые строго проанализированы на точность и документированы. Разработанная библиотека производит вычисление указанных функций с помощью модельного типа чисел с плавающей точкой, задаваемых с произвольной точностью.

### 1. Введение

Главная цель данной работы заключается в создании модельной реализации функций Бесселя, описанных в стандарте Linux Standard Base (LSB) [1].

В работе рассматриваются наиболее эффективные из известных методов вычислений функций Бесселя первого и второго рода,  $J_n(x)$  и  $Y_n(x)$  соответственно. Тщательно проанализирована точность самих методов, а также точность выполняемых в ходе вычислений арифметических операций. Также в работе исследованы свойства функций Бесселя и их поведение в особых точках, составлены требования к реализациям этих функций.

Работа состоит из следующих частей. Сначала приведены основные свойства функций для ознакомления с ними. Затем приведён набор методов вычислений и исследование их точности. После этого проведён анализ ошибок арифметических операций, выполняемых при вычислениях по этим методам. Далее следует набор требований к реализациям функций, включающий в себя также анализ поведения в особых точках.

## 2. Функции Бесселя в стандарте LSB

math.bessel	функции Бесселя
math.bessel	j0 первого рода порядка 0
math.bessel	j1 первого рода порядка 1
math.bessel	jn первого рода порядка n
math.bessel	y0 второго рода порядка 0
math.bessel	y1 второго рода порядка 1
math.bessel	yn второго рода порядка n

Таблица 1. Список функций Бесселя, описанных в рамках LSB [1].

## 3. Основные понятия

Уравнение вида

$$x^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) \cdot y = 0$$

называется *уравнением Бесселя индекса  $\nu$* . Решение уравнения Бесселя, имеющее вид

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

называют *функцией Бесселя первого рода индекса  $\nu$* . Здесь  $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx$  — *гамма-функция* (для целых неотрицательных  $n$   $\Gamma(n) = (n-1)!$ ). Решение вида

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cdot \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

называется *функцией Бесселя второго рода индекса  $\nu$*  (а также *функцией Неймана* или *функцией Вебера*). В случае целых индексов  $\nu = n \in \mathbb{Z}$  приведенное выражение для  $Y_\nu(x)$  понимается как предел при  $\nu \rightarrow n$ .

В работе исследуются функции Бесселя первого и второго рода для целых индексов  $\nu = n \in \mathbb{Z}$ .

## 4. Графики функций

Графики функций  $J_0(x), J_1(x), J_2(x)$  изображены на Рис. 1, соответственно, сплошной, пунктирной и точечной линией.

Графики функций  $Y_0(x), Y_1(x), Y_2(x)$  изображены на Рис. 2, соответственно, сплошной, пунктирной и точечной линией.

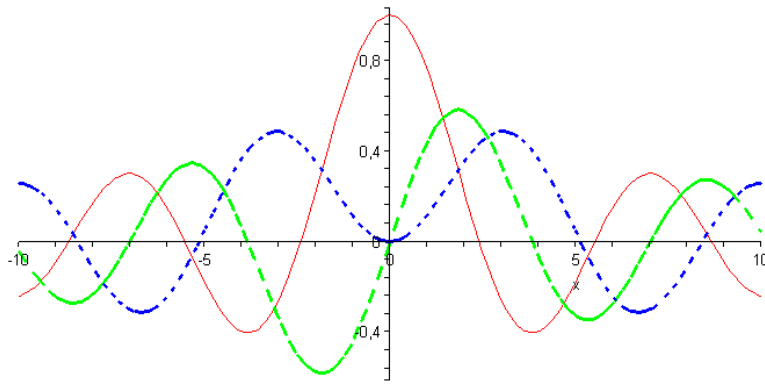


Рисунок 1. Графики функций  $J_0(x), J_1(x), J_2(x)$ .

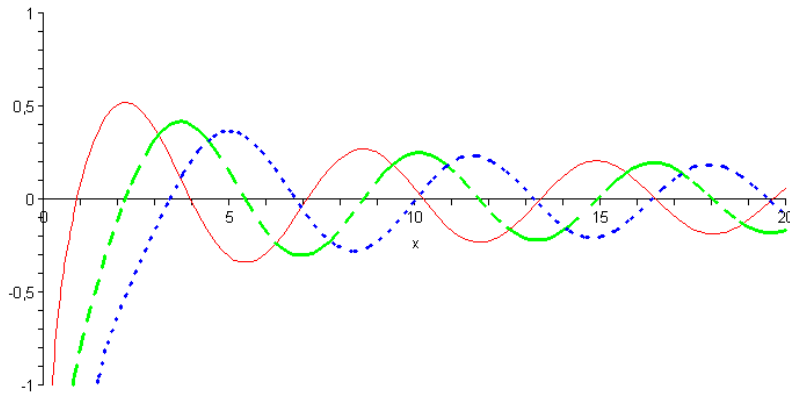


Рисунок 2. Графики функций  $Y_0(x), Y_1(x), Y_2(x)$ .

## 5. Асимптотики поведения функций Бесселя

Функции Бесселя имеют следующие асимптотики при различных условиях (см. [2,3]).

$$1. J_n(x) \rightarrow \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n, x \rightarrow 0$$

$$2. Y_0(x) \rightarrow \frac{2}{\pi} \left( \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right), x \rightarrow 0$$

$$3. Y_n(x) \rightarrow -\frac{(n-1)!}{\pi} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^n, x \rightarrow 0, n \neq 0$$

$$4. J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right), x > n^2$$

$$5. Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right), x > n^2$$

## 6. Вычисление факториала

Во многих формулах для вычисления функций Бесселя присутствует факториал индекса  $n!$ . Индекс есть переменная типа int, которая может принимать максимальное значение 2147483647. Факториал этого числа огромен. В работе используется формула Стирлинга для представления  $n!$  в удобной для вычислений форме:

$$n! \sim \sqrt{2\pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{S(n)},$$

$$S(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)n^{2k-1}},$$

где  $B_{2k}$  есть числа Бернулли, определяемые по формулам

$$B_0 = 1,$$

$$(m+1) \cdot B_m = -\sum_{k=0}^{m-1} C_{m+1}^k \cdot B_k.$$

Например, в первом разложении Мейсселя (см. ниже), в формуле для вычисления функции Бесселя первого рода есть множитель  $\frac{e^n}{n! \cdot n^n}$ , который приводится с помощью формулы Стирлинга к удобному для вычислений виду  $e^{-S(n)}$ .

Первые 10 чисел Бернулли с четными номерами имеют следующие значения:

$$B_0 = 1, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66},$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730}, B_{14} = \frac{7}{6}, B_{16} = -\frac{3617}{510}, B_{18} = \frac{43867}{798}, B_{20} = -\frac{174611}{330}$$

Поскольку, начиная с некоторого момента, числа Бернулли с номерами, делящимися на 4, отрицательны, а с номерами, не делящимися на 4, — положительны, ряд  $S(n)$  знакопеременный. Возьмём первые 10 его членов. Величина остатка ряда не превосходит первого отброшенного члена. Пренебрежение остатком ряда приводит к следующей относительной ошибке применения формулы Стирлинга.

$$\sigma \approx \frac{B_{22}}{22 \cdot 21 \cdot n^{21}} \approx \frac{10}{n^{21}}$$

В алгоритмах вычислений формула Стирлинга будет применяться для  $n \geq 100$ . При таких условиях имеем следующую оценку относительной погрешности.

$$\sigma \leq 10^{-41}$$

Этого вполне достаточно, так как везде далее будем добиваться гораздо большей относительной ошибки  $10^{-20}$ .

## 7. Методы вычисления функций

Поскольку различные методы вычисления функций Бесселя имеют разные характеристики сходимости в разных областях, для вычисления значений этих функций на всех значениях аргументов была выбрана следующая комбинация методов.

- Представление рядом Тейлора в окрестности нуля ( $x \leq \sqrt{n}$ ).
- Асимптотические разложения Ганкеля ( $x \geq n^2$ ).
- Метод Стида ( $x \cong n$ ).
- Первое разложение Мейсселя ( $x < n, n \geq 100$ ).
- Второе разложение Мейсселя ( $x > n, n \geq 100$ ).

Везде далее целое число  $P$  означает выбираемое заранее количество хранимых значимых цифр в числах, с которыми оперируют вычислительные алгоритмы вычисления.

### 7.1. Представление $J_n(x)$ в виде степенного ряда

Согласно [2,3]  $J_n(x)$  имеет следующее разложение в ряд Тейлора в окрестности 0.

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

Для вычислений удобно считать  $(N-1)$ -ю частичную сумму ряда путём сведения к  $(N-1)$  произведениям для уменьшения промежуточных ошибок.

$$J_n(x) = \frac{1}{n! \cdot 2^n} \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{4 \cdot 1 \cdot (n+1)} \left( 1 - \frac{x^2}{4 \cdot 2 \cdot (n+2)} \left( 1 - \frac{x^2}{4 \cdot 3 \cdot (n+3)} \left( 1 - \dots \frac{x^2}{4 \cdot (N-1) \cdot (n+N-1)} \right) \dots \right) \right) \right)$$

Величина остатка этого ряда меньше его  $N$ -го члена. Таким образом, ошибка метода есть величина  $N$ -го члена ряда. Из-за медленной сходимости и нарастания ошибки этот метод применяется для значений аргументов  $x \leq \sqrt{n}$ . Для значений аргумента  $x > \sqrt{n}$  он становится неустойчивым по отношению к промежуточным ошибкам, связанным с арифметическими действиями, выполняемыми в процессе вычисления.

Вычисление функции отрицательного индекса сводится к вычислению функции положительного индекса с помощью формулы:  $J_{-n}(x) = (-1)^n \cdot J_n(x)$

#### 7.1.1. Ошибка вычисления

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \cdot n!} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(n, x)$$

$$A_k(n, x) = \frac{(-1)^k}{k!(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$\frac{A_{k+1}(n, x)}{A_k(n, x)} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(k+1)(n+k+1)}$$

Следовательно,  $A_k(n, x)$  при возрастании  $k$  сначала возрастают, а затем убывают.

Исследуем ошибки для значений аргумента  $x \leq \sqrt{n}$ .

$$R(N, x, n) = A_N(n, x) = \frac{1}{N!(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+N)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2N} \text{ — это относительная ошибка,}$$

так как  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(n, x)$  есть величина порядка единицы.

$R(N, x, n)$  уменьшается при уменьшении  $x$ , рассмотрим максимум:

$$R(N, \sqrt{n}, n) = \frac{\left(\frac{n}{4}\right)^N}{N!(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+N)!}$$

$$\frac{R_N}{R_{N-1}} = \frac{\frac{n}{4}}{N \cdot (n+N)} \leq \frac{1}{4N}$$

$$R_N \leq \frac{1}{4^N \cdot N!}$$

Чтобы добиться относительной ошибки  $10^{-20}$  нужно выбрать  $N$ , такое что

$$\frac{1}{4^N \cdot N!} \leq 10^{-20},$$

$$4^N \cdot N! \geq 10^{20},$$

$$N \geq 18$$

Попробуем расширить интервал, в котором можно достичь нужной относительной погрешности.

Зафиксируем  $n = 100$ ,  $x = 100$ ,  $N = 100$ , для  $R$  получим

$$R(n = 100, x = 100, N = 100) = \frac{50^{200}}{200!} \approx 7.89 \cdot 10^{-36}$$

Далее заметим, что  $R(n, x, N)$  убывает при дальнейшем увеличении  $N$ .

$$R(n = 100, x = 100, N = 101) = \frac{50^{202}}{101 \cdot 201!} \approx 9.71 \cdot 10^{-37}$$

Величину суммы ряда оценим на компьютере:  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(n, x) \approx 1.14 \cdot 10^{-13}$ .

Таким образом, величина относительной ошибки равна  $7.89 \cdot 10^{-36} / 1.14 \cdot 10^{-13} \approx 6.92 \cdot 10^{-23}$ .

Функция  $R(n, x, N)$  убывает при уменьшении  $n$ , следовательно, имеем следующие интервалы, на которых достигается относительная ошибка  $10^{-23}$  при выборе  $N = 100$ .

$$n \leq 100, x \leq n$$

Помимо ошибки, присущей самому методу, возникает ещё дополнительная ошибка, связанная с неточностью выполнения операций сложения, вычитания, умножения, деления. Ее влияние может быть исключено путём увеличения количества значимых цифр  $P$ , хранимых при вычислениях (ошибка проанализирована в одном из последних разделов).

## 7.2. Представление $Y_n(x)$ в виде степенного ряда

Используем следующее представление функций Бесселя второго рода [2,3].

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} \cdot J_n(x) \cdot \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2m} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right\}$$

В этой формуле при  $n = 0$  второй член (сумма по  $m$  от 0 до  $n-1$ ) считается равным 0.

С помощью этого представления значение  $Y_n(x)$  вычисляется для положительных индексов. Вычисление функции отрицательного индекса сводится к вычислению функции положительного индекса с помощью формулы:  $Y_{-n}(x) = (-1)^n \cdot Y_n(x)$ .

### 7.2.1. Ошибка вычисления

Исследуем ошибки для значений аргумента  $x \leq \sqrt{n}$ . Для этого введём следующие обозначения.

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \cdot J_n(x) \cdot \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right),$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2m},$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right\},$$

$$Y_n(x) = I_1 - I_2 - I_3.$$

Проанализируем составляющие  $Y_n(x)$ . Для  $I_3$  выполнено

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right\} \leq \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-1)!(m+n)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m},$$

т.е. этот член имеет порядок равный порядку  $J_n(x)$ . Таким образом,

$I_1 = \frac{2}{\pi} \cdot J_n(x) \cdot \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right)$  по порядку величины всегда больше  $I_2$ . Если  $n > 0$ ,  $x \leq \sqrt{n}$  то  $I_2$  по порядку величины больше  $I_1$ , так как  $I_2$  содержит как отрицательные степени  $x$ , так и положительные (при  $n \geq 2$ ).

Отсюда можно заключить, что при вычислении  $J_n(x)$  и  $I_3$  с некоторой относительной ошибкой  $\sigma$ , у  $Y_n(x)$  относительная ошибка будет меньше  $\sigma$ . Число членов в  $I_3$  для получения относительной ошибки  $10^{-20}$  можно получить из неравенства, аналогичного выведенному при анализе  $J_n(x)$ .

$$4^N \cdot (N-1)! \geq 10^{20}$$

$$N \geq 20$$

Можно расширить интервал, на котором возможно вычислить функцию  $Y_n(x)$  с относительной погрешностью  $10^{-20}$ , взяв  $N = 100$  (см. вычисление ошибок  $J_n(x)$ ).

$$n \leq 100, x \leq n$$

### 7.3. Асимптотические разложения Ганкеля (Hankel's expansion)

$$J_n(x), Y_n(x)$$

Используются асимптотические разложения Ганкеля [2] для функций Бесселя при  $x \rightarrow +\infty$  и ограниченном  $n$ .

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \cdot \left\{ \cos\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (n, 2m)}{(2 \cdot x)^{2m}} - \sin\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (n, 2m+1)}{(2 \cdot x)^{2m+1}} \right\}$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \cdot \left\{ \sin\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (n, 2m)}{(2 \cdot x)^{2m}} + \cos\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (n, 2m+1)}{(2 \cdot x)^{2m+1}} \right\}$$

$$(n, m) = \frac{\{4n^2 - 1\} \cdot \{4n^2 - 3\} \cdot \dots \cdot \{4n^2 - (2m-1)^2\}}{2^{2m} \cdot m!}$$

Ряды, которые содержат данные формулы, расходятся. В связи с этим знак бесконечности у суммы нужно понимать как суммирование до тех пор, пока члены ряда уменьшаются.

#### 7.3.1. Ошибка вычисления

Исследуем ошибки для значений аргумента  $x \geq n^2$ .

Введём следующие обозначения.

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \cdot \left\{ \cos\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_1 - \sin\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_2 \right\}$$

$$I_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (n, 2m)}{(2 \cdot x)^{2m}} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(n, x)$$

$$I_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (n, 2m+1)}{(2 \cdot x)^{2m+1}}$$

Рассмотрим, как ведут себя  $A_m(n, x)$ .

$$\frac{A_m}{A_{m-1}} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{(4n^2 - (4m-3)^2) \cdot (4n^2 - (4m-1)^2)}{128 \cdot (2m-1) \cdot m}$$

$A_m(n, x)$  начнут увеличиваться, когда

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{(4n^2 - (4m-3)^2) \cdot (4n^2 - (4m-1)^2)}{128 \cdot (2m-1) \cdot m} = 1$$

$$m \cong x \geq n^2$$

Заметим, что  $A_N$  есть относительная ошибка вычисления, так как  $I_1$  есть величина порядка единицы. Теперь найдём, каким нужно выбирать количество членов ряда для получения нужной относительной ошибки.

$$\frac{A_m}{A_{m-1}} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{(4n^2 - (4m-3)^2) \cdot (4n^2 - (4m-1)^2)}{128 \cdot (2m-1) \cdot m} \leq \frac{n^4}{16x^2m^2} \leq \frac{1}{16m^2}$$

$$A_N \leq \frac{1}{16^N \cdot (N!)^2} \leq \sigma = 10^{-20}$$

$$N \geq 9$$

Для любого значения  $\sigma$  можно подобрать свою величину  $N$ .

При значениях аргумента  $x < n^2$  необходимое значение  $N$  сильно увеличивается, и в добавление к этому метод становится неустойчивым по отношению к ошибкам выполняемых арифметических действий. Однако для небольших значений индекса попробуем расширить область применимости метода.

Исследуем при  $A_N$   $n \leq 100, x \geq n$ .

$$\frac{A_N}{A_{N-1}} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{(4n^2 - (4N-3)^2) \cdot (4n^2 - (4N-1)^2)}{128 \cdot (2N-1) \cdot N} \leq \frac{n^4}{16x^2N^2} \leq \frac{n^2}{16N^2}$$

$$A_N \leq \frac{n^{2N}}{16^N \cdot (N!)^2} \leq \frac{100^{2N}}{16^N \cdot (N!)^2} \leq 10^{-20}$$

$$N = 90$$

Оценку  $I_1$  сделаем на компьютере:  $I_1 \approx 2.32 \sim 1$ . Следовательно,  $A_N$  есть относительная ошибка.

При уменьшении  $n$ , или увеличении  $x$ , при выборе  $N = 90$ , относительная ошибка будет уменьшаться (при этом  $I_1 \sim 1$ ). Алгоритм вычисляет последовательно  $A_m$  и сравнивает с нужной ошибкой, при этом  $N$  определяется автоматически.

Теперь рассмотрим  $I_2$ . Заметим, что  $I_2$  по порядку величины есть

$$I_2 \sim I_1 \cdot \frac{4n^2 - 1}{8x},$$

$$I_2 < I_1$$

Вынесением множителя  $\frac{4n^2 - 1}{8x}$  из  $I_2$  можно повторить все рассуждения применённые к  $I_1$ .

Таким образом, выбрав то же число членов ряда в  $I_2$ , мы не увеличим относительной ошибки вычисления функции.

#### 7.4. Метод Стида (Steed's method) вычисления $J_n(x), Y_n(x)$

Рассматриваемый в этом разделе метод вычисления функций Бесселя описан в [4,5]. Он применяется для вычислений значений этих функций на аргументах, близких к их индексам.

Решается система из 4-х уравнений относительно  $J_n(x), Y_n(x)$  и их производных.

$$W \equiv J_n(x) \cdot Y_n'(x) - Y_n(x) \cdot J_n'(x) = \frac{2}{\pi \cdot x},$$

$$f_n \equiv \frac{J_n'(x)}{J_n(x)} = \frac{n}{x} - \frac{J_{n+1}(x)}{J_n(x)} = \frac{n}{x} - \left( \frac{1}{\frac{2(n+1)}{x} - \frac{1}{\frac{2(n+2)}{x} - \frac{1}{\frac{2(n+3)}{x} - \dots}}} \right),$$

$$p + iq = \frac{J_n'(x) + iY_n'(x)}{J_n(x) + iY_n(x)} = -\frac{1}{2 \cdot x} + i + \frac{i}{x} \cdot \left( \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - n^2}{2(x+i) + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - n^2}{2(x+2 \cdot i) + \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - n^2}{2(x+3 \cdot i) + \dots}}} \right),$$

$$\gamma \equiv \frac{p - f_n}{q};$$

$$J_n(x) = \pm \left( \frac{W}{q + \gamma(p - f_n)} \right),$$

$$Y_n(x) = \gamma \cdot J_n(x).$$

Первая непрерывная дробь считается до  $N_1$ -го уровня, вторая до  $N_2$ -го уровня. Первая непрерывная дробь сходится быстро для  $x \leq n$ , вторая для  $x \geq n$ . Чем больше отклонение аргумента от значения  $x_0 = n$  в ту или иную сторону, тем большими нужно выбирать числа  $N_1$  и  $N_2$ , чтобы обеспечить нужную точность вычислений.

Знак  $J_n(x)$  берётся равным знаку непрерывной дроби  $f_n$  во втором уравнении. Этот метод позволяет находить значения функций Бесселя  $J_n(x), Y_n(x)$  для значений аргумента  $x \cong n$ .

#### 7.4.1 Ошибка вычисления $J_n(x)$ и $Y_n(x)$

Поскольку оценка погрешностей усложнена из-за наличия ошибки непрерывной дроби, оценить которую очень сложно, то применяется следующий алгоритм проверки ошибок. Известно, что функции Бесселя удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \left(\frac{2n}{x}\right) \cdot J_n(x),$$

$$Y_{n-1}(x) + Y_{n+1}(x) = \left(\frac{2n}{x}\right) \cdot Y_n(x).$$

Пусть нам нужно оценить точность вычисления функции  $J_n(x)$ , тогда вычисляем заодно функции  $J_{n-1}(x)$  и  $J_{n+1}(x)$  по тому же алгоритму. Подставляем в рекуррентное соотношение. Если оно выполняется с некоторой ошибкой, то это и есть ошибка вычисления функции. Таким способом можно получить следующие интервалы, в которых данный алгоритм даёт относительную ошибку вычисления  $10^{-20}$  при выборе числа итераций дробей равным 500:

- 1)  $10^2 \leq n \leq 10^3, n-10 \leq x \leq n+400$
- 2)  $10^3 \leq n \leq 10^4, n-10 \leq x \leq n+100$
- 3)  $10^4 \leq n \leq 10^5, n-10 \leq x \leq n+10$

Данные интервалы можно расширить более мелким разбиением значений индекса  $n$ .

### 7.5. Первое разложение Мейсселя (Meissel's first expansion)

Рассматриваемый в этом разделе метод приведен в [6].

Перепишем уравнение Бесселя в следующем виде, сделав замену переменных.

$$z^2 \frac{d^2 J_n(nz)}{dz^2} + z \frac{dJ_n(nz)}{dz} + n^2(1-z^2)J_n(nz) = 0$$

Решение его ищем в виде

$$J_n(nz) = \frac{n^n}{n!} \exp\left\{ \int_z u(z) dz \right\}$$

$$u(z) = n \cdot u_0 + u_1 + \frac{u_2}{n} + \frac{u_3}{n^2} + \frac{u_4}{n^3} + \frac{u_5}{n^4} + \frac{u_6}{n^5} + \frac{u_7}{n^6} + \frac{u_8}{n^7} + \frac{u_9}{n^8} + \dots$$

находим функции  $u_0, u_1, u_2, \dots$  с помощью подстановки выражения для  $J_n(nz)$  в уравнение Бесселя.

$$u_0 = \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}, u_1 = \frac{z}{2(1-z^2)}, u_2 = -\frac{4z+z^2}{8(1-z^2)^{5/2}}, u_3 = \frac{4z+10z^3+z^5}{8(1-z^2)^4},$$

$$u_4 = -\frac{64z+560z^3+456z^5+25z^7}{128(1-z^2)^{11/2}}, u_5 = \frac{16z+368z^3+924z^5+347z^7+13z^9}{32(1-z^2)^7}, \dots$$

Интегрируем  $u(z)$  и получаем выражение для функции Бесселя первого рода.

$$J_n(nz) = \frac{(nz)^n \cdot \exp(n\sqrt{1-z^2}) \cdot \exp(-V_n)}{e^n \cdot n! (1-z^2)^{1/4} \cdot [1+\sqrt{1-z^2}]^n},$$

$$V_n = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + \dots,$$

$$V_1 = \frac{1}{24n} \left( \frac{2+3z^2}{(1-z^2)^{3/2}} - 2 \right), \quad V_2 = -\frac{4z^2+z^4}{16n^2(1-z^2)^3},$$

$$V_3 = -\frac{1}{5760 \cdot n^3} \left( \frac{16-1512z^2-3654z^4-375z^6}{(1-z^2)^{9/2}} - 16 \right),$$

$$V_4 = -\frac{32z^2+288z^4+232z^6+13z^8}{128 \cdot n^4(1-z^2)^6},$$

$$V_5 = \frac{1}{322560 \cdot n^5(1-z^2)^{15/2}} (67599 \cdot z^{10} + 1914210 \cdot z^8 + 4744640 \cdot z^6 + 1891200 \cdot z^4 + 78720 \cdot z^2 + 256) - \frac{1}{1260 \cdot n^5},$$

$$V_6 = -\frac{z^2}{192 \cdot n^6(1-z^2)^9} (48 + 2580 \cdot z^2 + 14884 \cdot z^4 + 17493 \cdot z^6 + 4242 \cdot z^8 + 103 \cdot z^{10}),$$

$$V_7 = \frac{1}{3440640 \cdot n^7(1-z^2)^{21/2}} (881664 \cdot z^2 + 99783936 \cdot z^4 + 1135145088 \cdot z^6 + 2884531440 \cdot z^8 + 1965889800 \cdot z^{10} + 318291750 \cdot z^{12} + 5635995 \cdot z^{14} - 2048) + \frac{1}{1680 \cdot n^7},$$

$$V_8 = -\frac{z^2}{4096 \cdot n^8(1-z^2)^{12}} (1024 + 248320 \cdot z^2 + 5095936 \cdot z^4 + 24059968 \cdot z^6 + 34280896 \cdot z^8 + 15252048 \cdot z^{10} + 1765936 \cdot z^{12} + 23797 \cdot z^{14}), \dots$$

Аналогично для функции Бесселя второго рода получаем

$$Y_n(nz) = \frac{e^n \cdot (n-1)! [1+\sqrt{1-z^2}]^n \cdot \exp(V_n)}{\pi \cdot (nz)^n \cdot (1-z^2)^{1/4} \cdot \exp(n\sqrt{1-z^2})},$$

$$V_n = V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + V_5 - V_6 + V_7 - V_8 + \dots$$

#### 7.5.1. Ошибка вычисления $J_n(x)$ и $Y_n(x)$

Оценим ошибку применённых формул.

$$z = \frac{x}{n},$$

$$V_9 \cong \frac{1}{10^7 \cdot n^9 \cdot (1-z^2)^{27/2}} \cdot (10^6 \cdot z^2 + 10^8 z^4 + 10^{10} z^6 + 10^{12} \cdot (z^8 + z^{10} + z^{12}) + 10^{10} z^{14} + 10^8 z^{16} + 10^6 z^{18})$$

Это и есть нужная относительная ошибка вычисления, обозначим её за  $f(z)$ .

Потребуем, чтобы величина ошибки не превосходила  $\sigma = 10^{-20}$ .

$$f(z) = \frac{1}{10^7 \cdot n^9 \cdot (1-z^2)^{27/2}} \cdot (10^6 \cdot z^2 + 10^8 z^4 + 10^{10} z^6 + 10^{12} \cdot (z^8 + z^{10} + z^{12}) + 10^{10} z^{14} + 10^8 z^{16} + 10^6 z^{18}) \leq 10^{-20}$$

Построим график функции  $f(z)$  для различных значений индекса  $n$ . См. Рис.3-6.

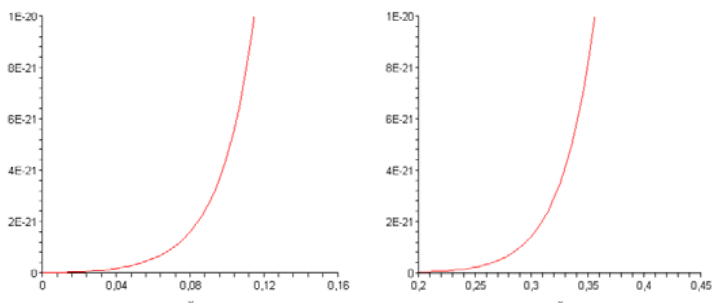


Рисунок 3. Графики  $f(z)$  для  $n = 100$  и  $n = 300$ .

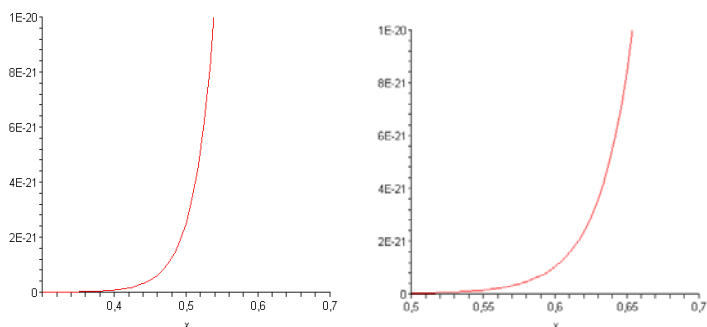


Рисунок 4. Графики  $f(z)$  для  $n = 600$  и  $n = 1000$ .

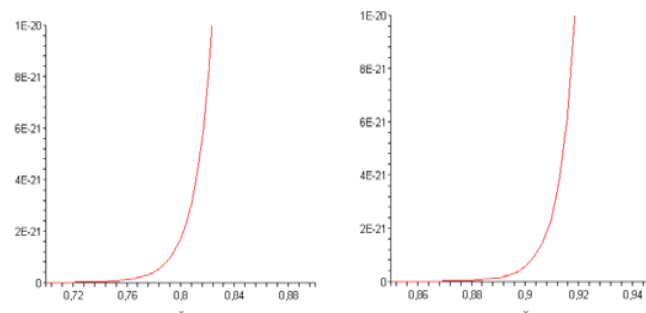


Рисунок 5. Графики  $f(z)$  для  $n = 3000$  и  $n = 10^4$ .

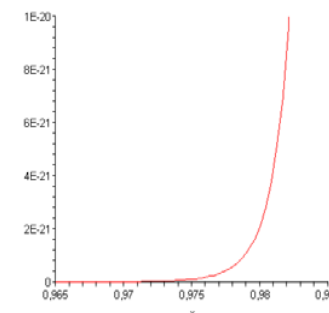


Рисунок 6. График  $f(z)$  для  $n = 10^5$ .

Анализируя графики, можно выбрать следующие интервалы для  $n$  и  $x$ , на которых данный метод приближает функции Бесселя с относительной погрешностью менее  $10^{-20}$ .

- 1)  $100 \leq n \leq 300, x \leq 0.1 \cdot n$
- 2)  $300 \leq n \leq 600, x \leq 0.3 \cdot n$
- 3)  $600 \leq n \leq 1000, x \leq 0.5 \cdot n$
- 4)  $1000 \leq n \leq 3000, x \leq 0.6 \cdot n$
- 5)  $3000 \leq n \leq 10^4, x \leq 0.8 \cdot n$
- 6)  $10^4 \leq n \leq 10^5, x \leq 0.9 \cdot n$
- 7)  $10^5 \leq n \leq \infty, x \leq 0.98 \cdot n$



Данной относительной погрешности достаточно для тестирования функций на переменных типа long double, а следовательно и double и float. Для тестирования функций на переменных типа double требуется меньшая относительная погрешность, а для тестирования float ещё меньшая.

## 7.6. Второе разложение Мейсселя (Meissel's Second expansion)

Приведенное здесь разложение также взято из [6].

$$J_n(n \cdot \sec \beta) = \sqrt{\frac{2 \cot \beta}{n\pi}} \cdot \exp\{-P_n\} \cdot \cos\left(Q_n - \frac{1}{4}\pi\right),$$

$$Y_n(n \cdot \sec \beta) = \sqrt{\frac{2 \cot \beta}{n\pi}} \cdot \exp\{-P_n\} \cdot \sin\left(Q_n - \frac{1}{4}\pi\right).$$

$$\sec \beta = \frac{1}{\cos \beta} = \frac{x}{n}, \quad \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \beta - 1}}$$

$$P_n = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots$$

$$P_1 = \frac{\cot^6 \beta}{16 \cdot n^2} (4 \sec^2 \beta + \sec^4 \beta),$$

$$P_2 = -\frac{\cot^{12} \beta}{128 \cdot n^4} (32 \sec^2 \beta + 288 \sec^4 \beta + 232 \sec^6 \beta + 13 \sec^8 \beta),$$

$$P_3 = \frac{\cot^{18} \beta}{192 \cdot n^6} (48 \sec^2 \beta + 2580 \sec^4 \beta + 14884 \sec^6 \beta + 17493 \sec^8 \beta + 4242 \sec^{10} \beta + 103 \sec^{12} \beta),$$

$$P_4 = -\frac{\cot^{24} \beta \sec^2 \beta}{4096 \cdot n^8} (1024 + 248320 \cdot \sec^2 \beta + 5095936 \cdot \sec^4 \beta + 24059968 \cdot \sec^6 \beta + 34280896 \cdot \sec^8 \beta + 15252048 \cdot \sec^{10} \beta + 1765936 \cdot \sec^{12} \beta + 23797 \cdot \sec^{14} \beta), \dots$$

$$Q_n = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + \dots$$

$$Q_1 = n(\tan \beta - \beta) - \frac{\cot^3 \beta}{24n} (2 + 3 \sec^2 \beta),$$

$$Q_2 = -\frac{\cot^9 \beta}{5760n^3} (16 - 1512 \cdot \sec^2 \beta - 3654 \cdot \sec^4 \beta - 375 \cdot \sec^6 \beta),$$

$$Q_3 = -\frac{\cot^{15} \beta}{322560 \cdot n^5} (256 + 78720 \cdot \sec^2 \beta + 1891200 \cdot \sec^4 \beta + 4744640 \cdot \sec^6 \beta + 1914210 \cdot \sec^8 \beta + 67599 \cdot \sec^{10} \beta),$$

$$Q_4 = \frac{\cot^{21} \beta}{3440640 \cdot n^7} (881664 \cdot \sec^2 \beta + 99783936 \cdot \sec^4 \beta + 1135145088 \cdot \sec^6 \beta + 2884531440 \cdot \sec^8 \beta + 1965889800 \cdot \sec^{10} \beta + 318291750 \cdot \sec^{12} \beta + 5635995 \cdot \sec^{14} \beta - 2048), \dots$$

### 7.6.1. Ошибка вычисления $J_n(x)$

$$P_5 \sim \frac{\cot^{30} \beta}{10^3 n^{10}} (10^3 z^2 + 10^7 z^4 + 10^9 (z^6 + z^8 + z^{10} + z^{12} + z^{14}) + 10^8 z^{16} + 10^5 z^{18}),$$

$$Q_5 \sim \frac{\cot^{27} \beta}{10^7 \cdot n^9} (10^6 z^2 + 10^8 z^4 + 10^{12} (z^6 + z^8 + z^{10} + z^{12}) + 10^{11} z^{16} + 10^8 \cdot z^{18}),$$

$$\cot \beta = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad z = \frac{x}{n}$$

Относительная ошибка вычисления есть

$$\sigma = |P_5| + \left| Q_5 \cdot \operatorname{tg}\left(Q_n - \frac{\pi}{4}\right) \right|$$

$$Q_n \approx Q_1 = n(\tan \beta - \beta) - \frac{\cot^3 \beta}{24n} (2 + 3 \sec^2 \beta) = n \left( \sqrt{\left(\frac{x}{n}\right)^2 - 1} - \arccos\left(\frac{n}{x}\right) \right) - \frac{1}{24n \cdot \left(\left(\frac{x}{n}\right)^2 - 1\right)^{3/2}} \cdot \left( 2 + 3 \left(\frac{x}{n}\right)^2 \right)$$

Учитывая, что  $z = \frac{x}{n}$ , перепишем последнее соотношение.

$$Q_n \approx n \left( \sqrt{z^2 - 1} - \arccos\left(\frac{1}{z}\right) \right) - \frac{1}{24n \cdot (z^2 - 1)^{3/2}} \cdot (2 + 3z^2)$$

Построим графики функции  $f(z, n) = |P_5(z, n)| + \left| Q_5(z, n) \cdot \operatorname{tg}\left(Q_n(z, n) - \frac{\pi}{4}\right) \right|$  как функции

от  $z$  для различных значений индекса  $n$ . См. Рис. 7, 8.

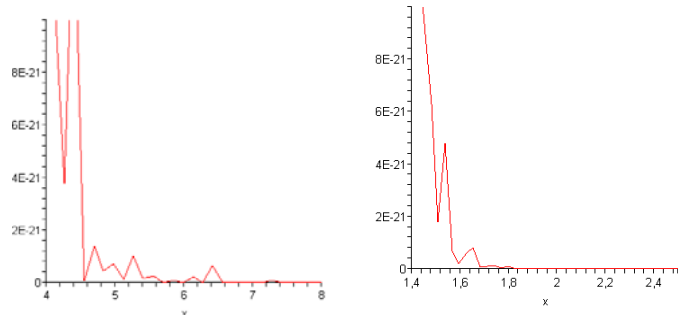


Рисунок 7. Графики  $f(z)$  для  $n = 100$  и  $n = 1000$ .

Из первого графика видно, что при  $z \geq 5$  относительная ошибка меньше  $10^{-20}$ .

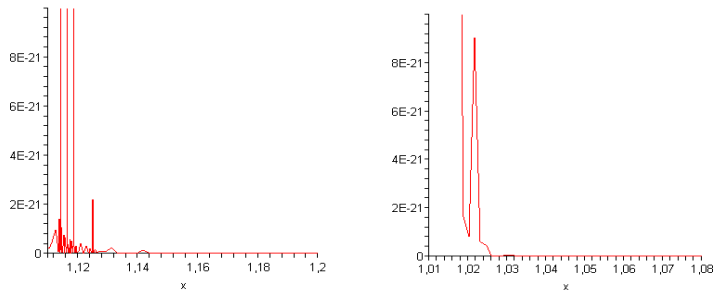


Рисунок 8. Графики  $f(z)$  для  $n = 10^4$  и  $n = 10^5$ .

Анализируя графики, можно выбрать следующие интервалы для  $n$  и  $x$ , на которых данный метод приближает функции Бесселя с относительной погрешностью менее  $10^{-20}$ .

- 1)  $100 \leq n \leq 1000, x \geq 5 \cdot n$
- 2)  $1000 \leq n \leq 10^4, x \geq 1.6 \cdot n$
- 3)  $10^4 \leq n \leq 10^5, x \geq 1.14 \cdot n$
- 4)  $10^5 \leq n < \infty, x \geq 1.03 \cdot n$

Для другой относительной погрешности можно подобрать свои интервалы.

### 7.6.2 Ошибка вычисления $Y_n(x)$

Относительная ошибка вычисления есть

$$\sigma = |P_5| + \left| Q_5 \cdot \cot(Q_n - \frac{\pi}{4}) \right|$$

Построим графики функции  $f(z, n) = |P_5(z, n)| + \left| Q_5(z, n) \cdot \cot(Q_n(z, n) - \frac{\pi}{4}) \right|$  как функции от  $z$  для различных значений индекса  $n$ . См. Рис. 9, 10.

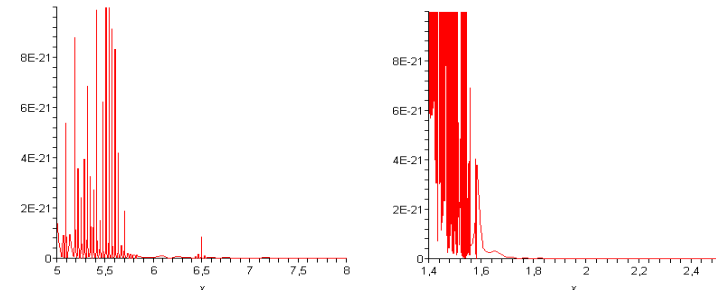


Рисунок 9. Графики  $f(z)$  для  $n = 100$  и  $n = 1000$ .

Из первого графика видно, что при  $z \geq 6$  относительная ошибка меньше  $10^{-20}$ .

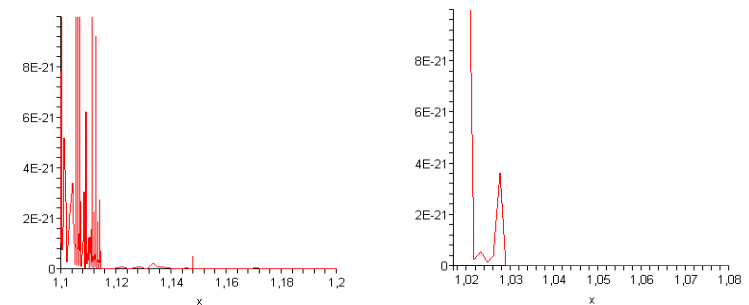


Рисунок 10. Графики  $f(z)$  для  $n = 10^4$  и  $n = 10^5$ .

Анализируя графики, можно выбрать следующие интервалы для  $n$  и  $x$ , на которых данный метод приближает функции Бесселя с относительной погрешностью менее  $10^{-20}$ :

- 1)  $100 \leq n \leq 1000, x \geq 6 \cdot n$
- 2)  $1000 \leq n \leq 10^4, x \geq 1.7 \cdot n$
- 3)  $10^4 \leq n \leq 10^5, x \geq 1.12 \cdot n$
- 4)  $10^5 \leq n < \infty, x \geq 1.03 \cdot n$

Для другой относительной погрешности можно подобрать свои интервалы.

## 8. Требования к реализациям функций Бесселя

### 8.1. Область определения функций

1.  $J_n(x)$  определена для всех значениях аргумента  $x$ .
2.  $Y_n(x)$  определена для значений аргумента  $x > 0$ .

### 8.2. Точки выхода за интервал представимых чисел

1. Если значение одной из функций  $J_n(x), n \neq 0$  при данном значении аргумента  $x \rightarrow 0$  мало настолько, что выходит за пределы интервала чисел с плавающей точкой, то данная функция должна возвращать 0. Обозначим за  $\varepsilon$  минимальное представимое положительное число. Из асимптотики  $J_n(x) \rightarrow \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n, x \rightarrow 0$

следует, что для аргументов  $|x| < 2 \cdot (\varepsilon \cdot n!)^{\frac{1}{n}}$  функция должна возвращать 0.

Таким образом, от функции  $J_n(x)$  нужно требовать:  $J_n(x) = 0, |x| < 2 \cdot (\varepsilon \cdot n!)^{\frac{1}{n}}$ .

2. Функция  $J_0(x)$  имеет в точке  $x = 0$  экстремум ( $J_0(x) \leq 1$ ). Следовательно, нужно требовать, чтобы в некоторой окрестности нуля определяемой неравенством  $1 - J_0(x) < \varepsilon$  функция возвращала единицу. Возьмём в разложении Тейлора

функции  $J_0(x)$  первые два члена:  $J_0(x) \approx 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2, x \rightarrow 0$ . Из неравенства

$1 - J_0(x) < \varepsilon$  получим следующий интервал для аргумента

$$1 - J_0(x) \approx 1 - \left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq \varepsilon \Rightarrow |x| \leq 2 \cdot \sqrt{\varepsilon}. \text{ Таким образом, от функции}$$

$J_0(x)$  нужно требовать:  $J_0(x) = 1, |x| \leq 2 \cdot \sqrt{\varepsilon}$ .

3. Если значение одной из функций  $Y_n(x)$  при данном значении аргумента  $x \rightarrow +0$  велико настолько, что выходит за пределы интервала чисел с плавающей точкой, то данная функция должна возвращать  $-\infty$ . Обозначим за  $M$  максимальное представимое число. Из асимптотики поведения функции  $Y_0(x)$  в

нуле следует, что для аргументов  $0 < x < 2 \cdot \exp\left\{-\gamma - \frac{\pi \cdot M}{2}\right\}$  (здесь  $\gamma$  —

постоянная Эйлера) функция должна возвращать  $-\infty$ . Заметим, что, например, для чисел типа float, double, long double верна следующая оценка:

$2 \cdot \exp\left\{-\gamma - \frac{\pi \cdot M}{2}\right\} \leq \varepsilon$ , а значит для всех представимых аргументов  $x > 0$

выполнено  $|Y_0(x)| \leq M$ . Для функции  $Y_1(x)$  должно выполняться:

$Y_1(x) = -\infty, 0 < x < \frac{2}{\pi \cdot M}$ . От функции  $Y_n(x)$  нужно требовать:

$$Y_n(x) = -\infty, 0 < x < 2 \cdot \left(\frac{(n-1)!}{\pi \cdot M}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

### 8.3. Область значений функций

Из всех функций только для одной можно дать точную оценку для области значений, причём это всего лишь оценка сверху.

$$J_0(x) \leq 1$$

Это свойство должно быть выполнено для всех значений аргумента.

### 8.4. Некоторые соотношения

$$1. J_0(-x) = J_0(x), J_1(-x) = -J_1(x), J_n(-x) = (-1)^n \cdot J_n(x)$$

$$2. J_{-n}(x) = (-1)^n \cdot J_n(x)$$

$$3. Y_{-n}(x) = (-1)^n \cdot Y_n(x)$$

4. Рекуррентные соотношения:

$$4.1. J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \left(\frac{2n}{x}\right) \cdot J_n(x)$$

$$4.2. Y_{n-1}(x) + Y_{n+1}(x) = \left(\frac{2n}{x}\right) \cdot Y_n(x)$$

### 8.5. Сохранение знака

Знак значения реализации функции для всех аргументов должен совпадать со знаком значения самой функции, кроме тех значений аргумента, у которых единица последнего разряда становится больше величины интервала смены знака.

## 8.6. Значения на особых числах с плавающей точкой

$x$	NaN	+0	-0	$+\infty$	$-\infty$
$J_0(x)$	NaN	1	1	0	0
$J_1(x)$	NaN	+0	-0	0	0
$J_n(x), n \geq 2$	NaN	+0	+0, $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$ -0, $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$	0	0
$J_n(x), n \leq -1$	NaN	+0, $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$ -0, $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$	+0	0	0
$Y_0(x)$	NaN	$-\infty$	NaN	0	NaN
$Y_1(x)$	NaN	$-\infty$	NaN	0	NaN
$Y_n(x)$	NaN	$-\infty$	NaN	0	NaN

Таблица 2. Значения функций Бесселя для особых чисел с плавающей точкой.

## 9. Ошибки выполнения арифметических операций

Во время всех вычислений одновременно вычисляется оценка ошибки, связанной с ограниченностью количества хранимых значимых цифр  $P$  в числах, с которыми оперируют используемые алгоритмы. Обозначим основание системы счисления за  $base$ . Оценка ошибка хранится в виде целого числа  $R$  и вычисляется по следующей формуле.

$$error = \frac{R}{base^P}$$

Пусть производится некоторая операция с числами  $X$  и  $Y$ . Обозначим как  $e_1$  порядок числа  $X$ , как  $e_2$  обозначим порядок числа  $Y$ , как  $f_1$  обозначим первую значащую цифру числа  $X$ , а как  $f_2$  — первую значащую цифру числа  $Y$ . Пусть ошибка  $X$  равна  $error_1$ , ошибка  $Y$  равна  $error_2$ .

Далее приводятся алгоритмы вычисления ошибок, которые позволяют оценить порядок возникающих ошибок операций. Сначала ошибки всех чисел инициализируются единицей, так как за некоторое число операций в результате округления у чисел появится погрешность не превосходящая  $10^{-P}$ .

### 9.1. Ошибка сложения чисел $X$ и $Y$

Если порядок  $X$  больше порядка  $Y$ , то

$$error = error_1 + \frac{1}{base^{e_1 - e_2}} \cdot error_2.$$

Если порядок  $Y$  больше порядка  $X$ , то

$$error = error_2 + \frac{1}{base^{e_2 - e_1}} \cdot error_1.$$

Если порядки равны, то

$$error = error_1 + error_2.$$

Если в результате сложения порядок результирующего числа больше порядка слагаемых, то ошибку нужно разделить на  $base$ .

### 9.2. Ошибка вычитания чисел $X$ и $Y$

Если порядок  $X$  больше порядка  $Y$ , то

$$error = error_1 + \frac{1}{base^{e_1 - e_2}} \cdot error_2.$$

Если  $e_1 - e_2 > P - 1$ , то ошибка увеличивается на единицу.

Если порядок  $Y$  больше порядка  $X$ , то

$$error = error_2 + \frac{1}{base^{e_2 - e_1}} \cdot error_1.$$

Если  $e_2 - e_1 > P - 1$ , то ошибка увеличивается на единицу.

Если порядки равны, то

$$error = error_1 + error_2.$$

### 9.3. Ошибка умножения чисел $X$ и $Y$

$$error = \frac{error_1 \cdot (1 + f_1)}{base} + \frac{error_2 \cdot (1 + f_2)}{base}$$

### 9.4. Ошибка деления чисел $X$ и $Y$

$$error = \frac{error_1 \cdot base}{f_1} + \frac{error_2 \cdot base \cdot f_1}{(f_2)^2}$$

Если  $f_1 / f_2 > 1$ , то ошибку нужно разделить на  $base$ .

### 9.5. Статистика ошибок вычисления $J_n(x)$

Далее в Табл. 3 приведены оценки ошибки используемых методов в виде значений  $R$  для различных интервалов, на которых вычисляются функции.

Метод	Интервал	R
Представление в виде степенного ряда	$n \leq 100, x \leq n$	$10^8$
	$n \geq 100, x \leq \sqrt{n}$	$10^2$
Асимптотическое разложение Ганкеля	$n \leq 100, x \geq n$	$10^6$
	$n \geq 100, x \geq n^2$	$10^3$
Метод Стида	$10^2 \leq n \leq 10^3, n-10 \leq x \leq n+400$	$10^9$
	$10^3 \leq n \leq 10^4, n-10 \leq x \leq n+100$	$10^9$
	$10^4 \leq n \leq 10^5, n-10 \leq x \leq n+10$	$10^9$
Первое разложение Мейсселя	$100 \leq n \leq 300, x \leq 0.1 \cdot n$	$10^4$
	$300 \leq n \leq 600, x \leq 0.3 \cdot n$	$10^3$
	$600 \leq n \leq 1000, x \leq 0.5 \cdot n$	$10^3$
	$1000 \leq n \leq 3000, x \leq 0.6 \cdot n$	$10^3$
	$3000 \leq n \leq 10^4, x \leq 0.8 \cdot n$	$10^3$
	$10^4 \leq n \leq 10^5, x \leq 0.9 \cdot n$	$10^4$
Второе разложение Мейсселя	$100 \leq n \leq 1000, x \geq 5 \cdot n$	$10^4$
	$1000 \leq n \leq 10^4, x \geq 1.6 \cdot n$	$10^5$
	$10^4 \leq n \leq 10^5, x \geq 1.14 \cdot n$	$10^6$
	$10^5 \leq n < \infty, x \geq 1.03 \cdot n$	$10^6$

Таблица 3. Значения оценок ошибок арифметических действий при вычислении  $J_n(x)$ .

### 9.6. Статистика ошибок вычисления $Y_n(x)$

Далее в Табл. 4 приведены оценки ошибки используемых методов в виде значений  $R$  для различных интервалов, на которых вычисляются функции.

Метод	Интервал	R
Представление в виде степенного ряда	$n \leq 100, x \leq n$	$10^8$
	$n \geq 100, x \leq \sqrt{n}$	$10^2$
Асимптотическое разложение Ганкеля	$n \leq 100, x \geq n$	$10^6$
	$n \geq 100, x \geq n^2$	$10^3$
Метод Стида	$10^2 \leq n \leq 10^3, n-10 \leq x \leq n+400$	$10^9$
	$10^3 \leq n \leq 10^4, n-10 \leq x \leq n+100$	$10^9$
	$10^4 \leq n \leq 10^5, n-10 \leq x \leq n+10$	$10^9$

Первое разложение Мейсселя	$100 \leq n \leq 300, x \leq 0.1 \cdot n$	$10^4$
	$300 \leq n \leq 600, x \leq 0.3 \cdot n$	$10^3$
	$600 \leq n \leq 1000, x \leq 0.5 \cdot n$	$10^3$
	$1000 \leq n \leq 3000, x \leq 0.6 \cdot n$	$10^3$
	$3000 \leq n \leq 10^4, x \leq 0.8 \cdot n$	$10^3$
	$10^4 \leq n \leq 10^5, x \leq 0.9 \cdot n$	$10^4$
Второе разложение Мейсселя	$100 \leq n \leq 1000, x \geq 6 \cdot n$	$10^4$
	$1000 \leq n \leq 10^4, x \geq 1.7 \cdot n$	$10^5$
	$10^4 \leq n \leq 10^5, x \geq 1.12 \cdot n$	$10^6$
	$10^5 \leq n < \infty, x \geq 1.03 \cdot n$	$10^6$

Таблица 4. Значения оценок ошибок арифметических действий при вычислении  $Y_n(x)$ .

### 10. Структура разработанной реализации

В результате проведенной работы была разработана реализация функций Бесселя первого и второго рода на языке C. Реализация выполнена в виде набора функций, работающих с данными типа `unifloat` (числа с плавающей точкой произвольной точности) и размещенных в файле `bessel.c`. Разработанные функции перечислены в Табл. 5.

Декларация функции	Пояснение
<code>unifloat bessell_j0(unifloat x, int method)</code>	Функция Бесселя первого рода индекса 0
<code>unifloat bessell_j1(unifloat x, int method)</code>	Функция Бесселя первого рода индекса 1
<code>unifloat bessell_y0(unifloat x, int method)</code>	Функция Бесселя второго рода индекса 0
<code>unifloat bessell_y1(unifloat x, int method)</code>	Функция Бесселя второго рода индекса 1
<code>unifloat bessell_jn(int n, unifloat x, int method)</code>	Функция Бесселя первого рода индекса n
<code>unifloat bessell_yn(int n, unifloat x, int method)</code>	Функция Бесселя второго рода индекса n
Вспомогательные функции	
<code>unifloat powerseries_jn(int n, unifloat x)</code>	Реализация ряда Тейлора для $J_n(x)$
<code>unifloat powerseries_yn(int n, unifloat x)</code>	Реализация ряда Тейлора для $Y_n(x)$

unifloat Hankel_jn(int n, unifloat x)	Реализация разложения Ганкеля для $J_n(x)$
unifloat Hankel_yn(int n, unifloat x)	Реализация разложения Ганкеля для $Y_n(x)$
unifloat Steed_jn(int n, unifloat x)	Реализация метода Стида для $J_n(x)$
unifloat Steed_yn(int n, unifloat x)	Реализация метода Стида для $Y_n(x)$
unifloat MeisselFirst_jn(int n, unifloat x)	Реализация первого разложения Мейсселя для $J_n(x)$
unifloat MeisselFirst_yn(int n, unifloat x)	Реализация первого разложения Мейсселя для $Y_n(x)$
unifloat MeisselSecond_jn(int n, unifloat x)	Реализация второго разложения Мейсселя для $J_n(x)$
unifloat MeisselSecond_yn(int n, unifloat x)	Реализация второго разложения Мейсселя для $Y_n(x)$
unifloat Stirling_series(int n)	Вспомогательная функция для вычисления факториала
unifloat UFsqrt(unifloat x)	Вспомогательная функция извлечения корня
unifloat UFpow(int n, unifloat x)	Вспомогательная функция возведения в степень
complexnum complex_add(complexnum x, complexnum y)	Сложение комплексных чисел
complexnum complex_sub(complexnum x, complexnum y)	Вычитание комплексных чисел
complexnum complex_mul(complexnum x, complexnum y)	Умножение комплексных чисел
complexnum complex_div(complexnum x, complexnum y)	Деление комплексных чисел

Таблица 5. Список функций, разработанных при реализации вычислений функций Бесселя.

## 11. Заключение

В результате данной работы исследованы и реализованы методы вычислений функций Бесселя, проанализирована их точность и приведена статистика арифметических операций. Составлены требования к реализациям функций.

## Литература

[1] <http://www.linuxbase.org/spec>

- [2] У. Джоунс, В. Трон. *Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения*. М: Мир, 1985.
- [3] Г. Н. Ватсон. *Теория Бесселевых функций*. М: ИЛ, 1949.
- [4] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.
- [5] F. A. Chishtie, S. R. Valluri, K. M. Rao, D. Sikorski, and T. Williams. *The Analysis of Large Order Bessel Functions in Gravitational Wave Signals from Pulsars*. In Proc. Of the 19-th International Symposium on High Performance Computing Systems and Applications, 2005.
- [6] M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1965.