

DOI: 10.15514/ISPRAS-2023-35(2)-14



## О проблемах при моделировании плоских течений вязкой жидкости при повышенных значениях числа Рейнольдса вихревыми методами в программном комплексе VM2D

*И.А. Коробова, ORCID: 0000-0002-8701-723X <i-soldatova@bk.ru>  
 Е.П. Рятина, ORCID: 0000-0002-7533-3796 <evgeniya.ryatina@yandex.ru>  
 А.А. Хорошева, ORCID: 0009-0009-0876-8667 <khoroshevaann@gmail.com>*

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,  
 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1*

**Аннотация.** Вихревые методы вычислительной гидродинамики – эффективный в инженерной практике метод определения гидродинамических нагрузок, действующих на помещенные в поток тела. Их использование позволяет производить решение задач гидроупругости в сопряженной постановке со сравнительно малыми затратами вычислительных ресурсов. Во многих приложениях рассматривается поперечное обтекание элементов конструкций, имеющих значительное удлинение, что позволяет с допустимой точностью использовать метод плоских сечений, переходя к рассмотрению плоских задач. Современные модификации вихревых методов позволяют моделировать течения вязкой несжимаемой среды. На основе метода вязких вихревых доменов в 2017-2022 гг. в МГТУ им. Н.Э. Баумана и ИСП им. В.П. Иванникова РАН создан программный комплекс VM2D. Данный код позволяет с достаточной точностью рассчитывать обтекание профилей при малых значениях числа Рейнольдса, тогда как для повышенных чисел Рейнольдса верные результаты наблюдаются лишь для профилей с острыми кромками и угловыми точками, и только на режимах, когда наиболее интенсивный отрыв происходит именно с указанных точек. Причина погрешности результатов для других режимов видится в некорректном моделировании отрыва с гладкой поверхности профиля при высоких числах Рейнольдса, что, в свою очередь, является следствием неправильного моделирования эволюции завихренности в окрестности точек (зон) отрыва. В работе приведены некоторые результаты моделирования обтекания различных профилей при различных значениях числа Рейнольдса и выдвинута гипотеза, объясняющая причину рассогласования результатов расчетов с данными экспериментов. Показано, что спектр кинетической энергии турбулентности соответствует «двумерной турбулентности».

**Ключевые слова:** плоское течение, вихревые методы, аэродинамические характеристики, спектр кинетической энергии турбулентности

**Для цитирования:** Коробова И.А., Рятина Е.П., Хорошева А.А. О моделировании плоских течений вязкой жидкости вихревыми методами в программном комплексе VM2D. Труды ИСП РАН, том 35, вып. 2, 2023 г., стр. 201-214. DOI: 10.15514/ISPRAS-2023-35(2)-14

## On Problems in 2D Viscous Flows Simulation at Higher Values of the Reynolds Numbers by Vortex Methods Using the VM2D Code

*I.A. Korobova, ORCID: 0000-0002-8701-723X <i-soldatova@bk.ru>  
 E.P. Ryatina, ORCID: 0000-0002-7533-3796 <evgeniya.ryatina@yandex.ru>  
 A.A. Khorosheva, ORCID: 0009-0009-0876-8667 <khoroshevaann@gmail.com>*

*Bauman Moscow State Technical University,  
 5/1, ul. Baumanskaya 2-ya, Moscow 105005, Russia*

**Abstract.** Vortex methods of computational fluid dynamics are an efficient tool in engineering practice for estimating hydrodynamic loads acting on bodies placed in a flow. Their usage allows for solving of coupled hydroelastic problems with relatively small computational cost. In many applications, the cross flow around structural elements with large elongation is considered, that allows one to use the flat cross-sections method providing the acceptable accuracy. Thus, flat flows simulation around airfoils is required. Modern modifications of vortex particle methods make it possible to simulate flows of a viscous incompressible medium. Based on the method of viscous vortex domains in 2017-2022 the VM2D code have been developed in Bauman University and Ivannikov Institute for System Programming. This code allows for flow simulating around airfoils with acceptable accuracy at low Reynolds numbers, while for higher Reynolds numbers, correct results are observed only for airfoils with sharp edges and corner points, and only in regimes where the most intensive flow separation takes place at these points. The reason for the error in the results for other regimes is seen in incorrect modeling of the flow separation on smooth airfoil surface line at high Reynolds numbers, which, in turn, is a consequence of incorrect modeling of vorticity evolution in the vicinity of separation points (zones). Some results of flow simulations around different airfoils at different values of the Reynolds number are presented and a hypothesis explaining the reason for the discrepancy between numerical results and experimental data is proposed. It is shown that the kinetic energy spectrum of turbulence corresponds to “two-dimensional turbulence”.

**Keywords:** 2D flow; vortex methods; aerodynamic characteristics; spectrum of kinetic energy of turbulence

**For citation:** Korobova I.A., Ryatina E.P., Khorosheva A.A. On Problems in 2D Viscous Flows Simulation at Higher Values of the Reynolds Numbers by Vortex Methods Using the VM2D Code. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 35, issue 2, 2023, pp. 201-214 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2023-35(2)-14

### 1. Введение

Одной из наиболее важных в аэрогидродинамике является задача о моделировании взаимодействия элементов различных конструкций с потоком. В инженерных приложениях течение среды как таковое обычно самостоятельного интереса не представляет, а требуется рассчитать действующие на обтекаемое тело нагрузки, величина и характер действия которых определяют поведение подвижной или деформируемой конструкции. Подобные задачи возникают при расчете элементов строительных конструкций, как правило протяженных, большепролетных мостов, разнообразных тросовых конструкций, проводов воздушных линий электропередачи, подводных трубопроводов и шлангов, элементов конструкций летательных аппаратов, трубок теплообменников энергетических установок и т.п.

В настоящее время существует множество различных подходов к решению задач вычислительной гидродинамики. Наиболее распространенными являются методы, относящиеся к классу сеточных, такие как метод конечных разностей, метод контрольных объемов, метод конечных элементов и всевозможные их модификации. Стоит отметить, что в рамках использования для моделирования таких методов имеется возможность учитывать, и весьма точно, действие множества факторов, характерных для исследуемых физических процессов, что делает их область применения весьма обширной. При этом данные методы являются вычислительно трудоемкими, особенно если речь идет о моделировании нестационарного обтекания подвижных/деформируемых тел.

Другой класс – лагранжевы бессеточные методы – включает в себя вихревые методы [1–3], область применения которых ограничена несжимаемыми течениями, но во многих технических приложениях это упрощение представляется вполне допустимым. В вихревых методах в качестве первичной расчетной величины рассматривают завихренность; по известному полю завихренности можно восстановить поле скоростей в любой точке среды, используя обобщенный закон Био – Савара [4], и поле давления, пользуясь аналогами интегралов Бернулли и Коши – Лагранжа [5]. Генерация завихренности происходит на поверхности обтекаемых тел, обеспечивая тем самым выполнение граничного условия прилипания. Следует отметить, что в вихревых методах при расчете внешнего обтекания нет необходимости искусственно ограничивать область течения, т.к. граничное условие затухания возмущений на бесконечности выполняется автоматически и точно.

На сегодняшний день вихревые методы активно развиваются и существуют модификации, которые позволяют рассматривать трехмерные и двумерные течения. Соответствующие алгоритмы являются несоизмеримыми по сложности, однако при решении многих практических задач тела, взаимодействующие с потоком, имеют значительное удлинение, и поэтому вместо расчета пространственного обтекания можно рассмотреть одну или несколько задач о плоском обтекании отдельных сечений (метод плоских сечений [6]). Таким образом, алгоритмы расчета плоских задач по моделированию обтекания профилей до сих пор остаются актуальными; главным их «конкурентным преимуществом» является низкая вычислительная сложность, а следовательно – возможность сравнительно быстрого выполнения расчетов.

Тем не менее, в силу специфических особенностей вихревых методов на сегодня существует лишь небольшое количество программных реализаций вихревых методов, свободно доступных расчетчикам (в идеале – с открытым исходным кодом). Одним из них является программный комплекс VM2D [7], свободно доступный из репозитория github по ссылке <https://github.com/vortexmethods/VM2D>, в основе которого лежит метод вязких вихревых доменов [2, 8] и некоторые авторские модификации, в основном связанные с использованием  $T$ -схем повышенной точности [9] для решения граничных интегральных уравнений, а также некоторых других алгоритмов. Код VM2D можно использовать для моделирования плоских течений; он позволяет решать широкий класс задач, в том числе в сопряженной постановке, с использованием возможностей современных многопроцессорных ЭВМ различных архитектур (возможны расчеты на CPU и GPU). Целью данной работы является рассмотрение области применимости существующих алгоритмов вихревых методов на основе опыта использования программного комплекса VM2D и определения некоторых направлений будущего развития указанного кода в частности и вихревых методов моделирования плоских течений в целом.

## 2. Численное моделирование вязких течений в программном комплексе VM2D

Не ставя перед собой задачу полно и всесторонне рассмотреть классы и постановки задач, которые могут быть решены с использованием кода VM2D (получить представление об этом можно из [7, 10]), обратимся к вопросу об учете влияния вязкости при моделировании плоских течений.

В исторической перспективе современные версии вихревых методов для решения двумерных задач восходят к методу дискретных вихрей [11, 12] (в зарубежных публикациях используются как термин «discrete vortex method» [13], так и «lumped vortex method» [14]), который, появившись еще в 1950-х годах, по-видимому стал одним из первых методов вычислительной гидродинамики. В основе указанного метода – численное моделирование течения идеальной (невязкой) жидкости, описываемого уравнениями Эйлера; в такой постановке можно моделировать потенциальные или, по крайней мере, безвихревые течения.

Стоит отметить, что возможно воспроизведение и намного более сложных нестационарных отрывных режимов обтекания профилей – это особенно актуально для тонких профилей (пластинок), крыловых профилей и, в целом, для профилей с острыми кромками и угловыми точками. Именно на концах пластины (одном или обоих, рис. 1) или в угловых точках профиля задается положение схода вихревой пелены; сама сходящая вихревая пелена, формирующая вихревой след, рассматривается как тонкая поверхность разрыва касательной компоненты скорости.

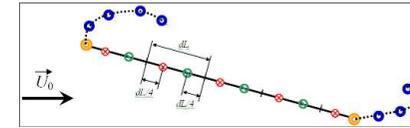


Рис. 1. Расчетная схема моделирования обтекания тонкой пластинки методом дискретных вихрей со сходом вихревых пелен с обоих концов. Показано разбиение пластинки на панели; положения контрольных точек (красным), присоединенных вихрей (зеленым), свободных вихрей (оранжевым) и вихревые следы – тонкие поверхности разрыва, моделируемые точечными вихрями (синим)

Fig. 1. Numerical scheme for flow simulation around a thin plate using the method of discrete vortices with vortex sheets shedding from both ends. Plate splitting into panel is shown as well as positions of control points (red), attached vortices (green), free vortices (orange) and vortex sheets that are modelled as thin discontinuity surfaces, represented by point vortices

Подобная модель хоть и является довольно грубой, но позволяет решить ряд представляющих практический интерес задач. Принципиальный ее недостаток – невозможность решать задачи по расчету обтекания гладких профилей, на которых положение точки отрыва потока априори задать невозможно. Также нет возможности моделировать течения, характеризующиеся низкими числами Рейнольдса, во многом определяемые силами вязкости.

Развитие вихревых методов моделирования плоских течений в значительной мере пошло именно по пути разработки алгоритмов решения уравнений Навье – Стокса с учетом влияния вязкости. На сегодня известны метод случайных блужданий (random walk), разработанный в 1970-х годах [15], метод обмена интенсивностями (particle strength exchange, PSE), предложенный в 1989 году [16], метод распределения ядра вихря (core spreading), впервые предложенный в 1973 г. [17] и позже развитый в 1996 году [18], метод диффузионной скорости, известный в нескольких модификациях, и некоторые другие. Именно к последнему относится метод вязких вихревых доменов [2, 8], реализованный в коде VM2D и обладающий, как представляется, рядом преимуществ перед остальными методами.

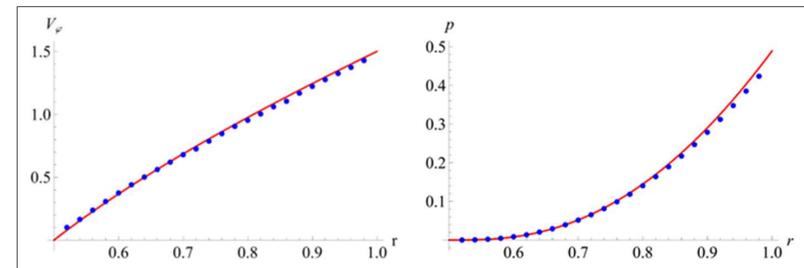


Рис. 2. Профили окружной компоненты скорости и давления в течении Куэтта между соосными цилиндрами (внутренний радиусом 0.5 неподвижен, внешний радиусом 1 вращается); точки – расчет, сплошная линия – точное решение в зависимости от расстояния до оси вращения

Fig. 2. Velocity and pressure profiles for Couette flow between co-rotating cylinders (internal cylinder of radius 0.5 is immovable, external one with radius 1 is rotating); dots indicate numerical solution; solid line represents exact solution against the distance to the axis

Методические эксперименты по выполнению расчетов при помощи кода VM2D показывают, что течения с преобладанием вязких эффектов удастся моделировать довольно качественно: профили скоростей в течении Пуазейля в канале, в течении Куэтта между двумя соосными вращающимися цилиндрами (рис. 2), в пограничном слое на тонкой пластине в задаче Блазиуса (рис. 3) воспроизводятся весьма точно, причем даже при сравнительно малом количестве вихревых частиц.

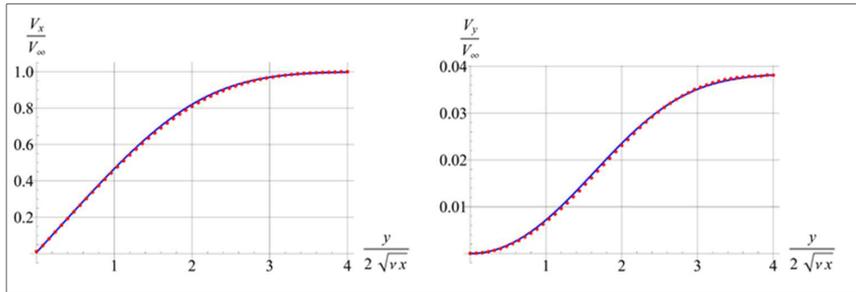


Рис. 3. Профили горизонтальной  $V_x$  и вертикальной  $V_y$  компонент скорости в пограничном слое на тонкой пластине (задача Блазиуса); представлена зависимость от автомодельной переменной ( $\nu$  – кинематическая вязкость,  $V_\infty$  – скорость набегающего потока); точки – расчет, сплошная линия – точное решение.

Fig. 3. Horizontal  $V_x$  and vertical  $V_y$  dimensionless velocity profiles in the cross section on a thin plate (Blasius problem); the dependency against the self-similar variable is shown ( $\nu$  is kinematic viscosity,  $V_\infty$  is incident flow velocity); dots indicate numerical solution; solid line represents exact solution.

Намного сложнее обстоит дело с моделированием обтекания профилей при умеренных и повышенных значениях числа Рейнольдса, когда, с одной стороны, влияние сил вязкости сравнительно мало (а вдали от границы профиля, в глубине области течения – в большинстве случаев пренебрежимо!), но при этом его требуется учитывать корректно, чтобы правильно моделировать процессы, происходящие в пристеночном слое, и таким образом правильно воспроизводить отрыв потока от профиля.

### 3. Моделирование нестационарного обтекания кругового цилиндра

С учетом того, что моделирование нестационарных и переходных режимов обтекания является той областью, где применение для расчетов вихревых методов может быть наиболее эффективно, рассмотрим тестовую задачу о моделировании обтекания цилиндра, мгновенно приведенного в движение с постоянной скоростью в неподвижной среде.

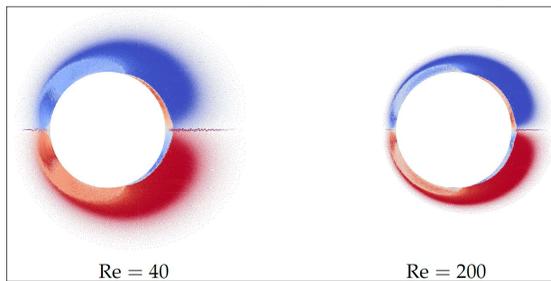


Рис. 4. Положения вихревых частиц за мгновенно приведенным в движение круговым цилиндром  $Re = 40$  и  $Re = 200$  в момент времени  $t_* = 0.5$

Fig. 4. Vortex particles positions in vortex wakes after the impulsively started circular cylinder at  $Re = 40$  and  $Re = 200$  at time moment  $t_* = 0.5$

Расчет нестационарной силы лобового сопротивления, действующей на цилиндр при различных значениях числа Рейнольдса, является «стандартной» тестовой задачей, которая рассматривалась многими исследователями. На рис. 4 показаны вихревые следы в начальной фазе движения цилиндра, рассчитанные при помощи кода VM2D при идентичных постановках задачи, различающихся только величинами коэффициента вязкости среды, соответствующими значениям числа Рейнольдса  $Re = 40$  и  $Re = 200$ . В качестве масштаба времени выбрано отношение диаметра цилиндра к скорости набегающего потока.

Зависимости суммарной силы сопротивления, обусловленной распределением давления и вязким трением, от безразмерного времени для рассмотренных случаев показаны на рис. 5 в сравнении с результатами [19–21]. Видно, что результаты моделирования хорошо согласуются с результатами, полученными другими исследователями.

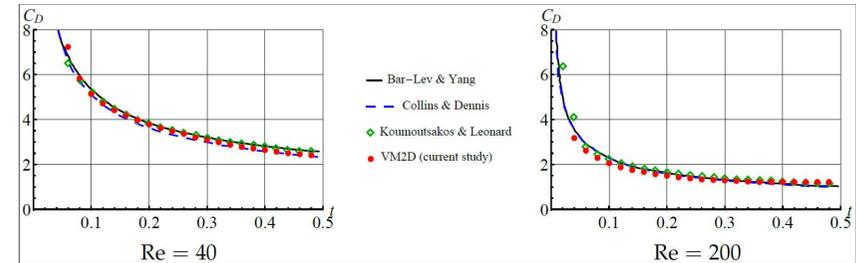


Рис. 5. Нестационарный коэффициент лобового сопротивления

для мгновенно приведенного в движение кругового цилиндра при  $Re = 40$  и  $Re = 200$

Fig. 5. Unsteady drag force coefficient acting on the impulsively started circular cylinder at  $Re = 40$  and  $Re = 200$

Аналогичное моделирование было выполнено для скорости движения цилиндра, соответствующей более высокому значению числа Рейнольдса  $Re = 3000$ . Конечное безразмерное время моделирования теперь было выбрано равным  $t_* = 5.0$ . Вихревой след в моменты времени  $t = 1.0$ ,  $t = 2.0$ ,  $t = 3.0$ ,  $t = 4.0$ ,  $t = 5.0$  показаны на рис. 6.

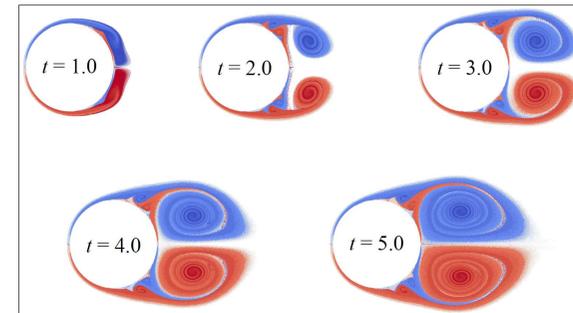


Рис. 6. Положения вихревых частиц за мгновенно приведенным в движение круговым цилиндром при  $Re = 3000$  в разные моменты времени

Fig. 6. Vortex particles positions in vortex wakes after the impulsively started circular cylinder at  $Re = 3000$  at different time moments

Эта задача оказывается значительно более сложной. Чтобы обеспечить согласованность результатов моделирования с приведенными в литературе [21–27] данными для  $Re = 3000$ , потребовалось рассмотреть весьма тщательной дискретизации профиля, малого шага по времени, достаточно большого количества вихревых частиц (порядка полумиллиона) в области течения (порядка полумиллиона). Столь подробное разрешение в совокупности с использованием  $T$ -схем решения граничного интегрального уравнения позволили избежать

возникновения осцилляций действующих сил, характерных для многих реализаций вихревых методов. На рис. 7 показаны результаты расчета нестационарной зависимости силы лобового сопротивления от времени, полученные при использовании кода VM2D в сравнении с результатами других авторов.

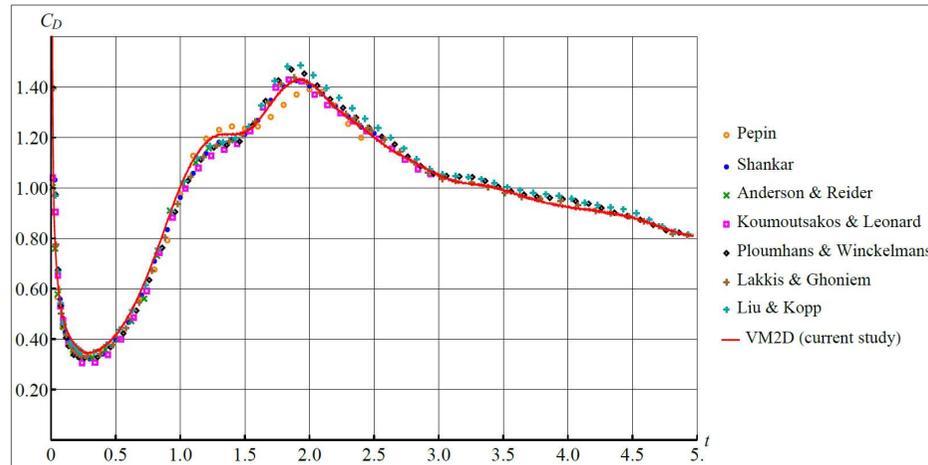


Рис. 7. Нестационарный коэффициент лобового сопротивления для мгновенно приведенного в движение кругового цилиндра при  $Re = 3000$

Fig. 7. Unsteady drag force coefficient acting the impulsively started circular cylinder at  $Re = 3000$

Попытки моделирования течений вокруг кругового профиля, характеризующихся большими значениями числа Рейнольдса, приводят к нежелательному результату: с использованием VM2D при моделировании квазистационарного режима обтекания результат оказывается качественно правильным (образуется вихревая дорожка Кармана с поочередным срывом вихрей), но количественно неверным.

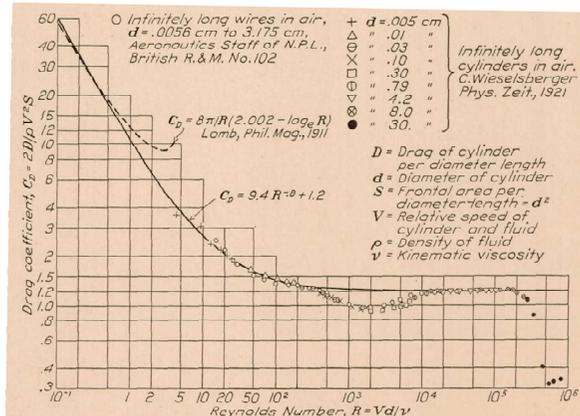


Рис. 8. Стационарный коэффициент силы лобового сопротивления, действующей на круговой цилиндр, в зависимости от числа Рейнольдса [28]

Fig. 8. Stationary drag coefficient acting on a circular cylinder in dependence to Reynolds number [28].

К примеру, не удастся воспроизвести известный эффект «стабилизации» коэффициента лобового сопротивления, в соответствии с которым стационарный (осредненный)

коэффициент лобового сопротивления цилиндра остается близким к 1.2 в широком диапазоне чисел Рейнольдса, а в области  $Re \approx 1000$  даже опускается ниже единичного значения (рис. 8).

При проведении расчетов же вихревыми методами коэффициент сопротивления оказывается существенно завышенным, близким к 1.5...1.6. Кроме того, из рис. 8 видно, что значение  $Re = 2 \cdot 10^5$  соответствует так называемому «кризису обтекания», после которого наблюдается резкое снижение коэффициента лобового сопротивления. Качественный эффект «кризиса сопротивления» наблюдается и в расчетах вихревым методом (на это также указано в работе [29]), однако он наблюдается раньше, примерно при  $Re = 10^5$ .

#### 4. Моделирование обтекания крыловых профилей

Рассмотрим задачу моделирования обтекания крыловых профилей при средних значениях числа Рейнольдса. На рис. 9 показан вихревой след за симметричным крыловым профилем NACA-0012, установленным под углом атаки  $\alpha = 6^\circ$  в установившемся режиме обтекания при  $Re = 10^4$  и  $Re = 10^5$  [10]. Параметры расчета были выбраны аналогичными таковым для рассмотренного в предыдущем разделе случая обтекания цилиндра.

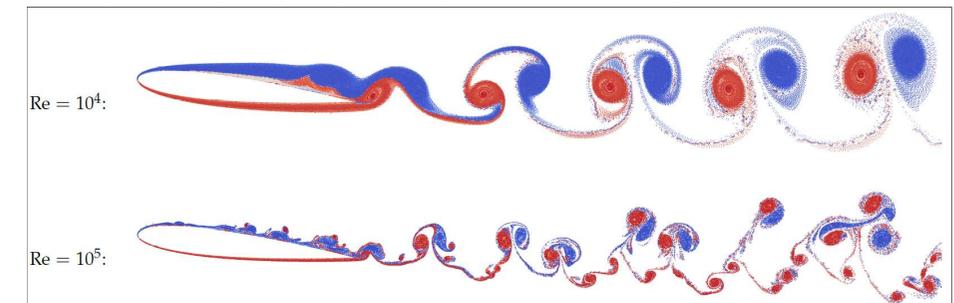


Рис. 9. Вихревые среды за профилем NACA-0012 для угла атаки  $\alpha = 6^\circ$  при  $Re = 10^4$  и  $Re = 10^5$

Fig. 9. Vortex wake after the NACA-0012 airfoil for angle of incidence  $\alpha = 6^\circ$  at  $Re = 10^4$  and  $Re = 10^5$

Полученные в расчете зависимости стационарных (осредненных) коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы от угла атаки (рис. 10) удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

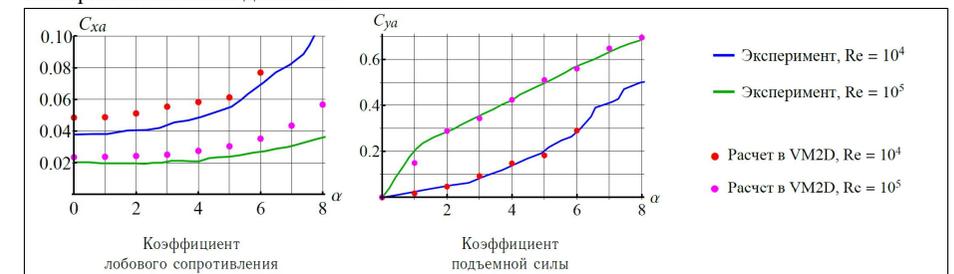


Рис. 10. Зависимости стационарных аэродинамических коэффициентов профиля NACA-0012 от угла атаки

Fig. 10. Drag and lift force coefficients against the angle of incidence for NACA-0012 airfoil

Несмотря на то, что значения коэффициента лобового сопротивления в расчете получаются несколько завышенными, это не является критичным в силу их малости. В целом можно сделать вывод о том, что обтекание моделируется правильно даже при высоких значениях числа Рейнольдса.

Если продолжать увеличивать угол атаки крыла, то результаты расчета в VM2D начинают существенно отличаться от данных эксперимента – главным образом, наблюдается сильно

завышенное значение коэффициента подъемной силы. При этом с увеличением угла атаки меняется и режим обтекания: отрыв происходит не только на задней острой кромке, но и с гладкой верхней поверхности профиля. По-видимому, именно эти эффекты моделируются недостаточно качественно.

### 5. О моделирование плоских течений в вихревых методах с учетом эффектов турбулентности

На основе представленных выше результатов можно сделать следующий вывод. Решение задачи в плоской постановке позволяет получать корректные результаты в двух случаях: при низких значениях числа Рейнольдса – без разницы, для гладких профилей или профилей с кромками и угловыми точками, а также при высоких значениях числа Рейнольдса, но только в случаях, когда не моделируется отрыв с гладкой поверхности.

В этой связи кажется оправданной следующая гипотеза: в указанных случаях реальное (трехмерное) обтекание конструкции на самом деле по существу является плоским; при более высоких числах Рейнольдса течение если остается плоским, то только на «макромасштабах», тогда как микромасштабные течения оказываются существенно трехмерными, при этом данная «микромасштабная трехмерность» оказывает влияние на течение в целом. Этот эффект хорошо известен, и в широко распространенных сеточных методах воспроизводится с привлечением т.н. моделей турбулентности, в рамках подходов RANS или LES. Именно осредненное (отфильтрованное) течение является плоским, тогда как пульсационная компонента поля скоростей – трехмерной, однако не разрешаемой в явном виде.

Как известно, необходимо введение в рассмотрение специальных замыкающих соотношений, собственно, и выражающих собой содержание той или иной модели турбулентности, связано с невозможностью обеспечить необходимое разрешение на расчетной сетке. Если производить прямое численное моделирование, то хорошо известно, что характерный пространственный масштаб структур в области течения, который должен быть разрешен, носит название колмогоровского масштаба и является обратно пропорциональным величине  $Re^{3/4}$ . Говоря про мелкомасштабные эффекты, следует упомянуть, что в сравнительно простых моделях турбулентность принимается изотропной в трех пространственных направлениях. Сама «турбулентность» определяется как трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимального, определяемого колмогоровским масштабом, до максимального, определяемого размером области течения. При этом спектральное распределение кинетической энергии турбулентности имеет так называемую инерционную (промежующую) между областью крупных энергосодержащих вихрей и областью диссипации, в которых энергия вихрей превращается в тепло в результате действия сил вязкости) область, в которой турбулентность является однородной и изотропной, а спектральная плотность кинетической энергии турбулентности  $E$  в соответствии с законом Колмогорова – Обухова пропорциональна  $k^{-5/3}$ , где  $k$  – волновое число [30].

В вихревых методах моделирования плоских течений «прямое» воспроизведение указанных эффектов в принципе невозможно потому, что первичная расчетная величина – завихренность априори принимается ортогональной области течения, что, собственно, исключает возможность моделирования процесса растяжения вихрей. Тем не менее, если проделывать все выкладки, имея в виду существенно плоский характер течения, то можно получить оценки, характеризующие «двумерную турбулентность»: инерционная область здесь состоит из двух подобластей: для больших волновых чисел справедлива асимптотика  $E \sim k^{-3}$ , а закон  $E \sim k^{-5/3}$  имеет место лишь в сравнительно узком диапазоне [31]. Именно эта зависимость может быть проверена на практике для практических расчетов течения в программном комплексе VM2D.

В качестве примера производилось моделирование обтекания кругового профиля при значении числа Рейнольдса  $Re = 10^6$ . Полученная в расчете величина стационарного (осредненного) коэффициента лобового сопротивления близка к 0.45 (см. обсуждавшийся выше вопрос о кризисе сопротивления), графики спектральной плотности кинетической энергии турбулентности показаны на рис. 11. Левый график получен путем прямой обработки результатов моделирования: производилось вычисление поля скоростей среды на равномерной сетке с малым шагом в области, имеющей форму квадрата со стороной, равной половине радиуса обтекаемого круга, и расположенной позади него на расстоянии, равном  $1/20$  радиуса цилиндра; далее выполнялось двумерное дискретное преобразование Фурье; на график нанесены величины квадратов модулей коэффициентов Фурье в зависимости от модуля волнового вектора; сам график представлен в двойном логарифмическом масштабе. Правый график получен в результате обработки временной зависимости для величины скорости среды в фиксированной точке (была выбрана точка, отстоящая от границы цилиндра на  $1/15$  радиуса, ее положение соответствует углу  $120^\circ$ ). Производилось дискретное преобразование Фурье, по горизонтальной оси отложена величина  $k = f/U$ , где  $f$  – частота,  $U$  – скорость набегающего потока, по вертикальной оси – величина квадрата модуля соответствующего коэффициента Фурье.

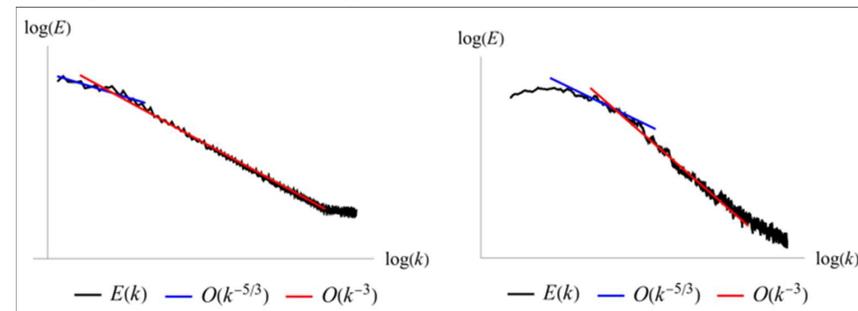


Рис. 11. Графики спектральной плотности кинетической энергии турбулентности (слева – для пространственного поля скоростей в фиксированный момент времени; справа – для зависимости скорости от времени в фиксированной точке пространства)  
Fig. 11. Spectral density plots of turbulence kinetic energy (left figure – for spatial velocity field at fixed time; right figure – for velocity dependency against time at fixed point)

Видно, что спектр плотности кинетической энергии «двумерной турбулентности» воспроизводится в инерционной области верно без привлечения каких-либо дополнительных моделей, что дает основание утверждать о достаточной эффективности реализованных в VM2D алгоритмов моделирования плоских течений. Попытки получения подобного результата с использованием сеточных методов, в частности, метода контрольного объема, реализованного в OpenFOAM, без привлечения моделей турбулентности к успеху не приводят (для этого потребовалась бы неприемлемо мелкая сетка и шаг по времени, а следовательно – неадекватные затраты вычислительных ресурсов).

Отметим, что на сегодня известны лишь отдельные работы, в которых предпринимались попытки «совмещения» вихревых методов с RANS и LES подходами к моделированию турбулентности [32-35], однако широкого распространения такие подходы не получили, по крайней мере, при моделировании пристеночных течений. Отчасти это можно объяснить имевшимися до последнего времени сложностями с обеспечением точности решения граничного интегрального уравнения относительно интенсивности генерируемого на профиле вихревого слоя, что в конечном счете существенно ограничивало исследователей в достижении высокого разрешения характеристик течения в пристеночной области. Использование вышеупомянутых T-схем позволяет решить данную проблему и открывает

возможность к построению новых модификаций вихревых методов, включающих возможность моделирования турбулентных эффектов.

## 6. Заключение

С использованием программного комплекса VM2D рассмотрена возможность применения вихревых методов, основанного на методе вязких вихревых доменов, к решению модельных задач о моделировании обтекания профилей при средних и повышенных значениях числа Рейнольдса: результаты расчетов при малых значениях числа Рейнольдса хорошо согласуются с экспериментальными, однако при больших значениях числа Рейнольдса наблюдается существенная погрешность.

Приведенные зависимости силы лобового сопротивления и подъемной силы для крылового профиля при числах Рейнольдса  $Re = 10^4$  и  $Re = 10^5$  для малых углов атаки близки к результатам экспериментов. Однако при увеличении угла атаки снова наблюдается расхождение в результатах. Это может быть объяснено тем, что с увеличением угла атаки происходит отрыв потока не только на острой кромке, но и на спинке профиля, и такой отрыв на гладкой поверхности, как и для случая кругового профиля, моделируется недостаточно корректно. Последнее связано с тем, что при высоких значениях числа Рейнольдса течение может моделироваться как плоское, но только на «макромасштабах», тогда как микромасштабные течения являются существенно трехмерными, особенно в зоне отрыва с гладкой поверхности, и такая «микромасштабная» трехмерность, принципиально невоспроизводимая в двумерных алгоритмах вихревых методов, оказывает существенное влияние на течение в целом.

В то же время анализ спектра кинетической энергии турбулентности показывает, что он с высокой точностью соответствует «двумерной турбулентности», из чего можно сделать вывод о достаточной эффективности реализованных в VM2D алгоритмов моделирования плоских течений.

## Список литературы / References

- [1] Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D. Vortex methods: theory and practice. Cambridge University Press, 2000, 328 p.
- [2] Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М., Изд-во МГУ, 2006 г., 184 стр. / Andronov, P.R., Guvernuyk, S.V., Dynnikova, G.Y. Vortex methods for non-stationary hydrodynamic loads estimation. Moscow, Moscow State University, 2006. 184 p. (in Russian).
- [3] Mimeau C., Mortazavi I. A review of vortex methods and their applications: from creation to recent advances. *Fluids*. 2021, vol. 6, issue 2, article no. 68, 49 p.
- [4] Kempka S.N., Glass M.W. et al. Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations. SANDIA Technical Report SAND96-0583, UC-700, 1996, 53 p.
- [5] Дынникова Г.Я. Аналог интегралов Бернулли и Коши — Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, вып. 1, 2000 г., стр. 31-41. / Dynnikova, G.Y. An analog of the Bernoulli and Cauchy—Lagrange integrals for a time dependent vortex flow of an ideal incompressible fluid. *Fluid Dynamic*, vol. 35, issue. 1, 2000, pp. 24-32.
- [6] Девнин С.И. Гидроупругость конструкций при отрывном обтекании. Л., Судостроение, 1975 г., 193 стр. / Devnin S.I. Hydroelasticity of Structures under Separated Flow. Leningrad, Sudostroenie, 1975, 193 p. (in Russian).
- [7] Marchevsky I., Sokol K., Ryatina E., Izmailova Y. The VM2D open source code for two-dimensional incompressible flow simulation by using fully Lagrangian vortex particle methods. *Axioms*, vol. 12, issue 3, 2023, article no. 248, 33 p.
- [8] Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье – Стокса. *Доклады Академии наук*, том 399, вып. 1, 2004 г., стр. 42-46. / Dynnikova G.Ya. The Lagrangian

- approach to solving the time-dependent Navier-Stokes equations. *Doklady Physics*, vol. 49, issue 11, 2004, pp. 648-652.
- [9] Марчевский И.К., Сокол К.С., Измайлова Ю.А. Т-схемы для математического моделирования генерации завихренности на гладких профилях в вихревых методах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки*, вып. 6, 2022 г., стр. 33–59 / Marchevsky I.K., Sokol K.S., Izmailova Yu.A. T-schemes for mathematical modelling of vorticity generation on smooths airfoils in vortex particle methods. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, issue 6, 2022, pp. 33–59 (in Russian).
  - [10] Kuzmina K., Marchevsky I. et al. On the scope of Lagrangian vortex methods for two-dimensional flow simulations and the POD technique application for data storing and analyzing. *Entropy*, vol. 23, issue 1, article no. 118, 38 p.
  - [11] Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. *Method of Discrete Vortices*. CRC Press, 1992. 464 p.
  - [12] Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М., ТОО «Янус», 1995 г., 520 стр. / Lifanov I.K. *Singular Integral Equations and Discrete Vortices*. De Gruyter, 1996; 485p.
  - [13] Katz J., Plotkin A. *Low-speed aerodynamics. From wing theory to panel methods*. McGraw-Hill Book Co., 1991, 632 p.
  - [14] McBain G.D. *Theory of Lift: Introductory Computational Aerodynamics in MATLAB/Octave*. Wiley, 2012, 342 p.
  - [15] Chorin A.J. Numerical study of slightly viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 57, issue. 4, 1973, pp. 785-796.
  - [16] Degond P., Mas-Gallic S. The weighted particle method for convection-diffusion equations. Part1. The case of an isotropic viscosity. *Mathematics of Computation*, vol. 53, issue 188, 1989, pp. 485-507.
  - [17] Kuwahara K., Takami H. Numerical studies of two-dimensional vortex motion by a system of point vortices. *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 34, issue 1, 1973, pp. 247-253.
  - [18] Rossi L.F. Resurrecting core spreading vortex methods: A new scheme that is both deterministic and convergent. *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 17, issue 2, 1996, pp. 370-397.
  - [19] Bar-Lev M., Yang H.T. Initial flow over an impulsively started circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 72, issue 4, 1975, pp. 625-647.
  - [20] Collins W.M., Dennis S.C.R. The initial flow past an impulsively started circular cylinder. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 26, issue 1, 1973, pp. 53–75.
  - [21] Koumoutsakos P., Leonard A. High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 296, 1995, pp. 1–38.
  - [22] Pepin F.M. Simulation of the flow past an impulsively started cylinder using a discrete vortex method. Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, 1990.
  - [23] Subramaniam S. A new mesh-free vortex method. Ph.D. Thesis. Florida State University, 1996, 253 p.
  - [24] Anderson C.B., Reider M.B. A high order explicit method for the computation of flow about a circular cylinder. *Journal of Computational Physics*, vol. 125, issue 1, 1996, pp. 207-224.
  - [25] Ploumhans P., Winckelmans G.S. Vortex methods for high-resolution simulations of viscous flow past bluff bodies of general geometry. *Journal of Computational Physics*, vol. 165, issue 2, 2000, pp. 354-406.
  - [26] Lakkis I., Ghoniem A. A high resolution spatially adaptive vortex method for separating flows. Part I: Two-dimensional domains. *Journal of Computational Physics*, vol. 228, issue 2, 2009, pp. 491-515.
  - [27] Liu Z., Kopp G.A. High-resolution vortex particle simulations of flows around rectangular cylinders. *Computers & Fluids*, vol. 40, issue 1, 2011, pp. 2–11.
  - [28] Zahm A.F. Flow and drag formulas for simple quadrics. NACA Technical Report NACA-TR-253, 1927, 23 p.
  - [29] Дынникова Г.Я. Использование быстрого метода решения задачи N тел при вихревом моделировании течений. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, том. 49, вып. 8, 2009 г., стр. 1458–1465. / Dynnikova G.Y. Fast technique for solving the N-body problem in flow simulation by vortex methods. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 49, issue 8, 2009, pp. 1389-1396.
  - [30] Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. *Успехи физических наук*, том 93, вып. 3, 1967 г., стр. 476-481 / Kolmogorov A.N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Proceedings of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 434, issue 1890, 1991, pp. 9-13.

- [31] Kraichnan R.H. Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, vol. 10, issue 7, 1967, pp. 1417-1423.
- [32] Alcântara Pereira L.A., Hirata H., Silveira Neto A. Vortex method with turbulence sub-grid scale modelling // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 25, issue 2, 2003, 9 p.
- [33] Yokota R., Shinnosuke O. Vortex methods for the simulation of turbulent flows: review. *Journal of Fluid Science and Technology*. vol. 6, issue 1, 2011, pp. 14-29.
- [34] Branlard E., Papadakis G. et al. Aeroelastic large eddy simulations using vortex methods: unfrozen turbulent and sheared inflow. *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 625, 2015, article no. 012019, 13 p.
- [35] Alvarez E. J.; Ning A. Reviving the vortex particle method: A stable formulation for meshless large eddy simulation. *arXiv preprint arXiv:2206.03658*, 2022, 34 p

### **Информация об авторах / Information about authors**

Ирина Александровна КОРОБОВА – аспирантка второго года обучения и ассистент кафедры «Прикладная математика». Научные интересы включают вихревые методы, вычислительную аэродинамику.

Irina Aleksandrovna KOROBVA – 2nd year post-graduate student and an assistant of the Applied Mathematics Department. Scientific interests include vortex methods, computational aerodynamics.

Евгения Павловна РЯТИНА – аспирантка 3 года обучения кафедры прикладной математики. Сфера научных интересов: вихревые методы, моделирование несжимаемых течений, быстрые алгоритмы и высокопроизводительные вычисления.

Evgeniya Pavlovna RYATINA – 3rd year PhD student of the Applied Mathematics Department. Research interests: vortex methods, incompressible flows numerical simulation, fast methods and high-performance computing

Анна Александровна ХОРОШЕВА – студентка 4 курса кафедры «Математическое моделирование». Сфера научных интересов: механика сплошных сред, вихревые методы, моделирование вязких течений.

Anna Aleksandrovna KHOROSHEVA – 4th year student of the Department of Mathematical Modeling. Research interests: mechanics of continua, vortex methods, modeling of viscous flows.