



DOI: 10.15514/ISPRAS-2026-38(2)-14

Модель движения установившегося потока в поперечном створе изогнутого естественного русла

К.С. Королёва, ORCID: 0000-0002-8872-0277 <snigur.ks@ccfebras.ru>

И.И. Потапов, ORCID: 0000-0002-3323-2727 <potapov2i@gmail.com>

Д.И. Потапов, ORCID: 0000-0001-6394-228X <potapovdi9@mail.ru>

*Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук
Россия, 680000, г. Хабаровск, Ким Ю Чена, д. 65.*

Аннотация. На текущий момент исследование вторичных токов с помощью трехмерного моделирования возможно только для модельных каналов, имеющих небольшой размер и относительно простую форму дна. Для моделирования реальных речных потоков все еще необходимы модели пониженной размерности. В работе предложена редуцированная математическая модель, описывающая течение турбулентного гидродинамического потока по речному руслу естественной формы и учитывающая существование вторичных поперечных течений, которые формируются на закруглениях русла. Редукция модели к двумерной постановке в плоскости створа выполнена при выдвигении гипотезы о квазистационарности редуцируемого гидродинамического потока и его асимптотическом поведении по потоковой координате створа. Модель сформулирована в смешанной постановке «скорости-вихрь-функция тока». Дополнительным условием для редукции задачи является задание граничных условий на свободной поверхности потока для поля скорости, определяемого в нормальном и касательном направлении к оси створа. Предполагается, что значения данных скоростей должны быть определены из решения вспомогательных задач или получены из данных натурных или экспериментальных измерений. В качестве численного метода решения уравнений математической постановки используется метод конечных элементов в формулировке Петрова-Галеркина, на его основе предложен алгоритм решения задачи. Для валидации предложенной математической модели и алгоритма решения задачи выполнено численное моделирование течения гидродинамического потока в створах реки Десны. Получено хорошее согласование результатов расчетов по предложенной модели с результатами натурных измерений на реке. Показано, что предложенная модель адекватно и с хорошей точностью описывает течение спокойного турбулентного потока в изогнутом русле естественной формы, корректно отображает поведение как основного потока, так и вторичных потоков.

Ключевые слова: речной поток; естественная морфология; открытый канал; излучина; речной створ; метод конечных элементов.

Для цитирования: Королёва К.С., Потапов И.И., Потапов Д.И. Модель движения установившегося потока в поперечном створе изогнутого естественного русла. Труды ИСП РАН, том 38, вып. 2, 2026 г., стр. 207–226. DOI: 10.15514/ISPRAS-2026-38(2)-14.

Благодарности: Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда № 24-17-20009 и гранта Правительства Хабаровского края (Соглашение № 108С/2024 от 31.07.2024 г.).

Model of steady river flow motion in the cross section of a curved natural channel

K.S. Koroliova, ORCID: 0000-0002-8872-0277 <snigur.ks@ccfebras.ru>

I.I. Potapov, ORCID: 0000-0002-3323-2727 <potapov2i@gmail.com>

D.I. Potapov, ORCID: 0000-0001-6394-228X <potapovdi9@mail.ru>

*Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,
65, Kim Yu-Chena st., Khabarovsk, Khabarovsk region, 680000, Russia.*

Abstract. At present, the study of secondary flows using three-dimensional modeling is possible only for channels of small size and a relatively simple bed shape. Reduced-order hydraulic models are still required for modeling natural river flows. In this paper, a reduced mathematical model described the turbulent hydrodynamic flow along a river channel of the natural shape and taken into account the secondary flows formed at channel bends is proposed. The reduction of the three-dimensional model to a two-dimensional one in the cross-section plane of the channel is carried out by hypothesizing the quasi-stationarity of the hydrodynamic flow considered and its asymptotic behavior along the flow coordinate of the channel. The model is formulated in a mixed “velocities-vortex-stream function” statement. An additional requirement for the problem reduction is the definition of boundary conditions on the flow free surface for the velocity fields determined in the normal and tangential directions to the channel axis. It is assumed that the values of these velocities should be determined from the solution of auxiliary problems or obtained from the data of natural or experimental measurements. The finite element method in the Petrov-Galerkin formulation is used as a numerical method for solving the mathematical model equations; an algorithm for the problem solving is proposed on its basis. To validate the proposed mathematical model and the algorithm, numerical modeling of the hydrodynamic flow in the Desna River cross-sections is implemented. Good agreement between the calculations by the proposed model and the results of the field measurements is obtained. It is shown that the proposed model describes the quiet turbulent flow in a bend channel with natural morphology adequately and with good accuracy, it correctly predicts the behavior of both the main and secondary flows.

Keywords: river flow; natural morphology; open channel; river bend; cross-section; finite element method.

For citation: Koroliova K.S., Potapov I.I., Potapov D.I. Model of steady river flow motion in the cross section of a curved natural channel. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 38, issue 2, 2026, pp. 207-226 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2026-38(2)-14.

Acknowledgements. The work has been supported by the Russian Science Foundation, grant 24-17-20009 and a grant from the Government of Khabarovsk Krai (Agreement No. 108C/2024 dated July 31, 2024).

1. Введение

Широко распространенное свойство естественного русла – это его плавный изгиб по направлению течения реки. В областях изгиба русла структура речного потока усложняется – помимо основного, доминирующего потока появляются вторичные (поперечные) течения. Вторичные течения, даже малые, оказывают значительное влияние как на основной поток, так и на распределение и транспорт наносов в излучине русла [1-3], они перенаправляют движение обогащенных наносами придонных водных масс и осветлённой воды с поверхностных слоев потока, тем самым определяя участки заиления и размыва донно-береговой линии русла. Таким образом, исследование характера движения гидродинамического потока в искривленном русле является актуальной задачей как для изучения закономерностей формирования естественных русел, так и для решения ряда практически важных инженерных задач.

Существуют экспериментальные методы исследования вторичных течений на изгибах русла [3-8], основанные на физическом измерении различных характеристик реки и последующем анализе полученных данных. Данные работы достоверно описывают процессы перестроения потока и изменение гидродинамики русла в области излучины. Однако экспериментальных работ, содержащих полный набор данных о течении потока в излучине, не очень много, из-

за высокой стоимости экспериментального исследования. Поэтому распространено изучение структуры потока с помощью методов математического моделирования. Для моделирования гидродинамического потока исследователи все чаще используют трехмерные модели, например, модель RANS с различными моделями турбулентности [9-11] или модель LES [12] в рамках свободно-распространяемых и коммерческих программных комплексов (Fluent, OpenFoam, Hydro3D, FLOW-3D и др.). В недавней работе Yan [9] используются программные средства InterFoam и OpenFoam и трехмерная модель RANS с различными моделями турбулентности для изучения характеристик потока в излучинах с различным изгибом, область расчета составляла 100 на 20 см в сечении и 150 см в длину, количество расчетных ячеек на всю трёхмерную область в данном исследовании варьируется от 500 000 до 700 000 с шагом сетки от 1 до 4.5 см.

В более поздней работе Liu [13] отмечается, что очень много исследований направлено на изучение характеристик потока в изгибающихся каналах с сечением простой геометрической формы – прямоугольной и трапециевидной, и существует необходимость изучения течений в каналах с формой сечения, близкой к естественной, т.е. с перекатами, углублениями и возвышениями. В своей работе он выполнил масштабное трехмерное моделирование течения в канале со сложной геометрической формой, для этого был использован пакет Fluent и постановка RNG k-ε, моделируемый канал имел сечение 19 на 120 см и длину 700 см, количество элементов составляло 4 847 019 для достижения шага сетки в пределах от 0.3 до 2 см для улавливания вторичных течений.

Таким образом рост вычислительных мощностей позволяет на сегодняшний день моделировать некоторые участки естественных русел рек с помощью трехмерных моделей гидродинамики. Однако, трехмерное моделирование гидродинамических процессов в речных потоках при исследовании русловых процессов по-прежнему является непомерно затратным, как по вычислительным, так и по временным ресурсам [14]. Основными причинами такого вывода являются большие – годовые или сезонные – интервалы по времени при интегрировании задачи, малый шаг по времени при моделировании руслового процесса, необходимость перестройки расчетной области и расчётной сетки на каждом шаге по времени.

Следовательно, по-прежнему актуальным является вопрос развития моделей пониженной размерности для решения практически значимых задач и моделирования потока в руслах реальных рек в рамках решения полной русловой задачи, которая помимо расчета гидродинамики требует расчет транспорта донных наносов и эволюции донно-береговой линии поверхности, являющейся границей расчетной области задачи [14-17].

С помощью плановых двумерных моделей, например, [14, 18, 19, 20], можно достаточно точно определить глубину и осредненные по глубине скорости потока, но они не способны естественным образом воспроизвести вторичную циркуляцию в створах реки. Для этого используются створовые модели – как самостоятельно, так и в качестве дополнительного инструмента при исследовании течений с помощью плановых моделей при возникновении необходимости более тщательного анализа течения в определенном створе.

При использовании створовых постановок встает вопрос об учете изгиба русла при расчете потока в створе. Известно, что в прямом канале вторичные течения слабо выражены и образуются за счет негомогенности и анизотропии турбулентности [18, 21]. При этом в изогнутом русле чем сильнее его изгиб, тем более выражены вторичные потоки в картине течения, которые перемешивают поток в радиальном направлении [18, 22].

На сегодняшний день сформулировано достаточно много математических моделей для речного створа [23-26], позволяющих определять характеристики речного потока без учета вторичных течений в створе, обзор по которым можно получить в работе [26].

В настоящей работе развивается математическая постановка, предложенная в работах [27, 28] для описания установившегося течения речного потока в створах естественных рек и

каналов. Предложенная модель может использоваться как инструмент для более детального изучения течения в области изгиба русла. Данная математическая модель уже была успешно верифицирована авторами на лотковых экспериментах в работах [27-28], где выполнено моделирование течения гидродинамического потока в изогнутых каналах с прямоугольной и параболической формой дна.

Особенностью рассматриваемой модели является возможность позиционирования створа в искривлении русла без дополнительных оценок и сторонних параметров путем установки граничных условий на свободной поверхности потока только для окружной скорости потока, что выгодно отличает ее от моделей, предложенных в работах [27-28].

Такое упрощение модели важно, поскольку экспериментальное определение радиальных скоростей на линии створа, является сложным и затратным процессом которое требует соблюдения определенных погодных условий, позволяющих избежать влияния ветрового воздействия на свободную поверхность речного потока.

Основным ограничением предлагаемой модели является требование на выполнение законов сохранения массы в створе. Решение рассматриваемых задач выполнялось при выборе различных моделей алгебраической турбулентности.

2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим задачу о течении спокойного установившегося турбулентного гидродинамического потока в реке со сложной морфологией дна, русло реки имеет изгиб и постоянный малый продольный уклон J в направлении движения гидродинамического потока. Предполагается, что для канала выполняются условия малости в отношении глубины потока к его ширине $H/B \ll 1$ и глубины потока к среднему радиусу его закругления $H/R \ll 1$. Геометрия расчетной области Ω и ее границы Γ_1, Γ_2 представлены на рис. 1.

Граница Γ_1 представляет собой смоченную донно-береговую поверхность канала ζ , граница Γ_2 определяет свободную поверхность потока η . В работе исследуется течение в естественном канале на основе данных, которые были описаны Розовским [3] как участок Десны с закруглением постоянного радиуса, поэтому было решено использовать цилиндрическую систему координат.

Предположим, что течение рассматриваемого потока в створе канала зависит только от координат створа r и z , тогда для описания его течения будут справедливы следующие уравнения [27-28]

$$\rho \left(\frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} + \sigma \frac{U}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_\epsilon \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_\epsilon \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \sigma \left(\mu_\epsilon \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) - \frac{\partial \mu_\epsilon}{\partial r} \frac{U}{r} \right) + \rho g J,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + r^\sigma \omega = 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\rho}{r^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \mu_\epsilon}{\partial r} \right) \frac{\partial \omega}{\partial r} - \left(\frac{\rho}{r^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \mu_\epsilon}{\partial z} \right) \frac{\partial \omega}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_\epsilon \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \sigma \frac{\omega}{r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_\epsilon \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \sigma \frac{\rho}{r} \frac{\partial (U^2)}{\partial z}, \quad (3)$$

$$V = \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad W = -\frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \omega = \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial z}.$$

где x , r и z - это окружная, радиальная и вертикальная координаты створа, $U = U(r, z)$, $V = V(r, z)$, $W = W(r, z)$ - это осредненные по Рейнольдсу скорости речного потока в области Ω , J - уклон речного русла, $\mu_e = \mu_t + \mu$, где μ_t - турбулентная вязкость потока, μ - молекулярная вязкость потока, ρ - плотность воды, g - ускорение свободного падения, Φ - функция тока, ω - функция вихря. Здесь и ниже движение речного потока рассматривается в цилиндрической системе координат при $\sigma=1$ и в декартовой (плоской) - при $\sigma=0$.

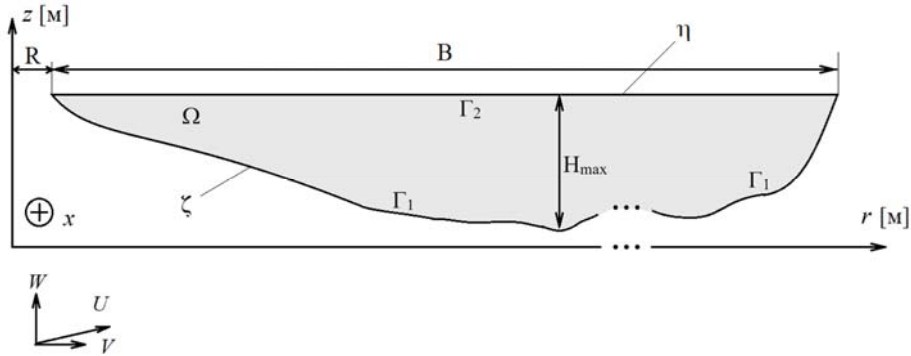


Рис. 1. Геометрия расчетной области Ω , являющейся радиальным сечением (створом) канала и ее границы $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, H_{\max} - максимальная глубина потока, B - ширина канала, R - радиус закругления канала, (U, V, W) - компоненты вектора скорости, согласованные с координатными осями (x, r, z) .

Fig. 1. Geometry of the calculation domain Ω which is a radial section (cross-section) of the channel and its boundaries $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, H_{\max} is the maximum of the flow depth, B is the channel width, R is the channel curvature radius, (U, V, W) are the components of the velocity vector, consistent with the coordinate axes (x, r, z) .

Так как на донно-береговой границе створа скорости равны нулю и реализуется условие прилипания, то производные от функции тока, которые выражают скорости на данной границе, тоже равны нулю; на границе свободной поверхности учитываются значения окружной скорости потока U_{Γ_2} и радиальной V_{Γ_2} . Таким образом, уравнения (1)-(3) замыкаются следующими граничными условиями на границах створа

$$U = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (r, z) \in \Gamma_1, \quad \Phi(r, z) = 0, \quad (r, z) \in \Gamma_2, \quad (4)$$

$$U = U_{\Gamma_2}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad \sigma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + (1 - \sigma) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - V_{\Gamma_2} \right) = 0, \quad (r, z) \in \Gamma_2. \quad (5)$$

Граничные условия для вихря на свободной и донной поверхности, согласно [29] с учетом (4) и (5) восстанавливаются из разложения функции тока в ряд Тейлора на контуре границы

$$\Phi(z_0 + h) = \Phi(z_0) + h \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2},$$

их вид на каждой итерации определяется по формулам

$$\omega = -\frac{2}{r^\sigma} \left(\frac{\Phi(h)}{h^2} \right), \quad (r, z) \in \Gamma_1, \quad \omega = -2 \left(\frac{\Phi(h)}{r^\sigma h^2} - \frac{V_{\Gamma_2}}{h} \right), \quad (r, z) \in \Gamma_2, \quad (6)$$

где $\Phi(h)$ - значение функции тока на расстоянии h , отложенном по нормали к границе области, n - нормаль к поверхности.

Для описания турбулентной вязкости используется модель турбулентности van Rijn [30]

$$\mu_t = \rho \kappa u_* H \begin{cases} \left(1 - \frac{z}{H}\right) \left(\frac{z}{H}\right), & \frac{z}{H} < 0.5, \\ 0.25, & \frac{z}{H} \geq 0.5; \end{cases} \quad (7)$$

и модель van Driest [31]

$$\mu_t = u_* \kappa z \left(1 - \exp\left(-\frac{z^+}{A_d}\right) \right), \quad A_d = 26, \quad z^+ = \frac{\rho z u_*}{\mu}, \quad (8)$$

где $\kappa = 0.4$ - постоянная Кармана, $u_* = \sqrt{g H J}$.

3. Слабая формулировка задачи

Рассмотрим слабоу вариационную формулировку Галеркина для задачи (1)-(8) с набором пробных функций $\{L_\alpha\} \in H^1(\Omega)$, содержащую интегральные тождества

$$\int_{\Omega} L_\alpha \rho \left(\frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial z} + \sigma \frac{U}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mu_e \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \right) d\Omega = \quad (9)$$

$$= \sigma \int_{\Omega} L_\alpha \left(\mu_e \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) - \frac{\partial \mu_e}{\partial r} \frac{U}{r} \right) d\Omega + \int_{\Omega} L_\alpha \rho g J d\Omega,$$

$$\int_{\Omega} L_\alpha \left(\left(\frac{\rho}{r^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \mu_e}{\partial r} \right) \frac{\partial \omega}{\partial r} - \left(\frac{\rho}{r^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \mu_e}{\partial z} \right) \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) d\Omega + \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} \left(\mu_e \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \right) d\Omega = \sigma \int_{\Omega} \frac{\partial L_\alpha}{\partial z} \frac{\rho \bar{U}^2}{r} d\Omega,$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \sigma \frac{L_\alpha}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - L_\alpha r^\sigma \omega \right) d\Omega = 0, \quad (11)$$

$$\int_{\Omega} \left[L_\alpha \left(V - \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right] d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} \left[L_\alpha \left(W + \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right] d\Omega = 0, \quad (12)$$

замыкаемые граничными условиями Дирихле из (4)-(6).

4. Дискретный аналог задачи

Для решения уравнений математической постановки воспользуемся методом конечных элементов в формулировке Петрова-Галеркина. Для этого расчетную область Ω необходимо разбить на трехузловые конечные элементы Ω_e , $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$. Введем на конечном элементе

функции формы [32] N_α

$$N_\alpha = a_\alpha + b_\alpha r + c_\alpha z \quad (13)$$

и их частные производные

$$b_\alpha = \frac{\partial N_\alpha}{\partial r}, \quad c_\alpha = \frac{\partial N_\alpha}{\partial z},$$

коэффициенты которых выражаются как

$$\begin{cases} a_1 = \frac{r_2 z_3 - r_3 z_2}{2S}, & b_1 = \frac{z_2 - z_3}{2S}, & c_1 = \frac{r_3 - r_2}{2S}, \\ a_2 = \frac{r_3 z_1 - r_1 z_3}{2S}, & b_2 = \frac{z_3 - z_1}{2S}, & c_2 = \frac{r_1 - r_3}{2S}, \\ a_3 = \frac{r_1 z_2 - r_2 z_1}{2S}, & b_3 = \frac{z_1 - z_2}{2S}, & c_3 = \frac{r_2 - r_1}{2S}; \end{cases} \quad S_p = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix}, \quad S = r^\sigma S_p$$

где r_k, z_k – координаты вершин (узлов) конечного элемента, S – площадь конечного элемента. Определим аппроксимацию искомых функций на конечном элементе

$$U = N_\alpha U_\alpha, \quad V = N_\alpha V_\alpha, \quad W = N_\alpha W_\alpha, \quad \mu_e = N_\alpha \mu_{e\alpha},$$

$$\omega = N_\alpha \omega_\alpha, \quad \Phi = N_\alpha \Phi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3;$$

где $U_\alpha, V_\alpha, W_\alpha, \mu_{e\alpha}, \omega_\alpha, \Phi_\alpha$ – значения искомых полей в узлах α конечного элемента Ω_e , в выражениях (14), (15) и далее ниже по тексту, где это не приводит к неоднозначностям, используется правило суммирования по «немым» узловым индексам ($N_\gamma U_\gamma \equiv \sum_{\gamma=1}^3 N_\gamma U_\gamma$), $\mu_{e\alpha}$ – значение функции приведенной вязкости в узлах конечного элемента.

Для противоточной стабилизации дискретного аналога задачи воспользуемся методом Петрова-Галеркина (SUPG) [33] с весовыми функциями

$$L_\alpha = N_\alpha + a h (A_r b_\alpha + A_z c_\alpha)$$

где

$$A_r = \frac{c_\alpha \Phi_\alpha}{\sqrt{(b_\alpha \Phi_\alpha)^2 + (c_\alpha \Phi_\alpha)^2}}, \quad A_z = \frac{-b_\alpha \Phi_\alpha}{\sqrt{(b_\alpha \Phi_\alpha)^2 + (c_\alpha \Phi_\alpha)^2}}, \quad h = \frac{\sqrt{S}}{2}, \quad 0.5 \leq a \leq 1.$$

Переход от узловых значений искомых функций к значениям на элементах будем выполнять по формулам

$$\bar{U} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 U_\alpha, \quad \bar{V} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 V_\alpha, \quad \bar{W} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 W_\alpha, \quad \bar{r} = r_0 + \frac{1}{3} \sum_{\gamma=1}^3 r_\gamma, \quad \bar{\mu} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 \mu_{e\alpha} \quad (14)$$

Используя интерполяцию (13)-(14), преобразуем интегральные тождества (9)-(11) в дискретные аналоги задачи

$$K_{\alpha\beta}^U U_\beta + F_\alpha^U = 0, \quad (K_{\alpha\beta}^\omega) \omega_\beta^* + F_\alpha^\omega = 0, \quad K_{\alpha\beta}^\Phi \Phi_\beta^* + F_\alpha^\Phi = 0,$$

$$M_{\alpha\beta}^V V_\beta + F_\alpha^V = 0, \quad M_{\alpha\beta}^W W_\beta + F_\alpha^W = 0,$$

где

$$K_{\alpha\beta}^U = \rho \left(\frac{1}{r^\sigma} C_{\alpha\beta\gamma} \Phi_\gamma + \sigma \frac{c_\gamma \Phi_\gamma}{r^2} \bar{M}_{\alpha\beta} \right) - \frac{\sigma}{r} \left(\left(b_\gamma \mu_{e\gamma} + \frac{\bar{\mu}_e}{r} \right) \bar{M}_{\alpha\beta} - \bar{\mu}_e F_\alpha b_\beta \right) + \bar{\mu}_e K_{\alpha\beta},$$

$$F_\alpha^U = \rho g J F_\alpha,$$

$$K_{\alpha\beta}^\omega = \frac{\rho}{r^\sigma} C_{\alpha\beta\gamma} \Phi_\gamma - Z_{\alpha\beta\gamma} \mu_{e\gamma} + \bar{\mu}_e K_{\alpha\beta} + \sigma \frac{\bar{\mu}_e}{r} b_\alpha F_\beta,$$

$$F_\alpha^\omega = \sigma \rho c_\alpha \frac{\bar{U}^2}{r} S,$$

$$K_{\alpha\beta}^\Phi = K_{\alpha\beta} + \frac{\sigma}{r} E_\alpha b_\beta, \quad F_\alpha^\Phi = \bar{r}^\sigma M_{\alpha\gamma} \omega_\gamma, \quad F_\alpha^V = -\frac{E_\alpha c_\gamma}{r^\sigma} \Phi_\gamma, \quad F_\alpha^W = \frac{E_\alpha b_\gamma}{r^\sigma} \Phi_\gamma,$$

$$K_{\alpha\beta} = (b_\alpha b_\beta + c_\alpha c_\beta) S, \quad M_{\alpha\beta} = \frac{S}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E_\alpha = \frac{S}{3} [1, 1, 1]^T,$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} + a h E_\alpha (A_r b_\beta + A_z c_\beta), \quad F_\alpha = E_\alpha + a h (A_r b_\alpha + A_z c_\alpha) S,$$

$$C_{\alpha\beta\gamma} = F_\alpha (c_\gamma b_\beta - b_\gamma c_\beta), \quad Z_{\alpha\beta\gamma} = F_\alpha (b_\gamma b_\beta + c_\gamma c_\beta).$$

5. Алгоритм решения задачи

Для каждого i -го узла донной поверхности (за исключением береговых узлов) с радиусом вектором узла $\bar{x}_i = (\bar{r}_i, z_i) \in \Gamma_1$ выполним расчет векторов $(\bar{\tau}_i, \bar{n}_i, \bar{p}_i$ и $\bar{p}_i^V)$ по формулам

$$\bar{\tau}_i = \bar{x}_{i+1} - \bar{x}_{i-1}, \quad \bar{n}_i = \begin{pmatrix} -\frac{\tau_{i2}}{\sqrt{\tau_{i1}^2 + \tau_{i2}^2}}, & \frac{\tau_{i1}}{\sqrt{\tau_{i1}^2 + \tau_{i2}^2}} \end{pmatrix}, \quad \bar{p}_i = \bar{x}_i + h \bar{n}_i,$$

$$\bar{p}_i^V = \bar{x}_i + h^V \bar{n}_i, \quad h^V = 0.05 H(r_i),$$

для каждого i -го узла свободной поверхности $\bar{x}_i \in \Gamma_2$ рассчитаем

$$\bar{n}_i = (0, -1), \quad \bar{p}_i = \bar{x}_i + h \bar{n}_i$$

и выполним поиск приграничных конечных элементов с функциями формы $N_\alpha(\bar{p}_i)$. Далее вычислим начальное значение придонной динамической скорости створа

$$u_* = \sqrt{g J R}, \quad R = S_\Omega / P, \quad S_\Omega = \int_{-s_0}^{\bar{z}} H(r) dr, \quad P = \int_{-s_0}^{\bar{z}} \sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta(r)}{dr} \right)^2} dr.$$

Затем выполним следующие шаги алгоритма:

1. Расчет начального поля вязкости для всех узлов расчетной области $\vec{x}_i = (r_i, z_i) \in \Omega$ по модели (7) или (8);

2. Расчет поля скорости U_β

$$\bigcup \left[K_{\alpha\beta}^U U_\beta + F_\alpha^U \right] = 0;$$

3. Расчет текущей вязкости потока с новыми значениями турбулентной вязкости μ_i , вычисленными по формулам (7) или (8);

4. Вычисление граничных условий (6) для функции вихря на контуре створа

$$\omega_i = -\frac{2N_\alpha(\vec{p}_i)\Phi_\alpha}{r_i^\sigma h^2}, \quad \vec{x}_i \in \Gamma_1, \quad \omega_i = -2\left(\frac{\Phi(\vec{p}_i)}{r_i^\sigma h^2} - \frac{V_{r_i}}{h}\right), \quad \vec{x}_i \in \Gamma_2;$$

5. Расчет поля вихря ω_β

$$\bigcup \left[K_{\alpha\beta}^\omega \omega_\beta + F_\alpha^\omega \right] = 0;$$

6. Релаксация функции вихря ω_β

$$\omega_\beta = (1-\gamma)\omega_\beta^* + \gamma\omega_\beta^0;$$

7. Расчет поля функции тока Φ_β

$$\bigcup \left[K_{\alpha\beta}^\Phi \Phi_\beta + F_\alpha^\Phi \right] = 0;$$

8. Релаксация функции тока

$$\Phi_\beta = (1-\gamma)\Phi_\beta^* + \gamma\Phi_\beta^0;$$

9. Расчет полей скорости в плоскости створа

$$\bigcup \left[M_{\alpha\beta}^V V_\beta + F_\alpha^V \right] = 0, \quad \bigcup \left[M_{\alpha\beta}^W W_\beta + F_\alpha^W \right] = 0;$$

10. Вычисление невязки $E_r = \frac{\sum_i (\omega_i - \omega_i^0)^2}{\sum_i \omega_i^2} + \frac{\sum_i (\Phi_i - \Phi_i^0)^2}{\sum_i \Phi_i^2}$, при $E_r > \varepsilon$ выполняется

переход к пункту 2. При $E_r \leq \varepsilon$ расчет завершается.

Здесь ε – допустимая невязка решения, $\gamma \leq 0.3$ – параметр релаксации решения, $\bigcup[*]$ обозначает операцию сборки локальных конечно-элементных дискретных аналогов задачи в глобальную систему алгебраических уравнений задачи, F^0 – значение функции на предыдущем шаге расчета, F^* – значение функции на текущем шаге расчета, M – количество узлов в расчетной области.

Математическая модель, численный метод и алгоритм решения задачи реализованы в информационной системе с открытым программным кодом «Амур» и размещены на платформе GitHub [34].

6. Результаты расчетов

Математическая модель (9)-(12) уже была успешно верифицирована авторами на лотковых экспериментах в работах [27-28], где выполнено моделирование течения

гидродинамического потока в изогнутых каналах с прямоугольной и параболической формой дна.

Основной отличительной особенностью задач, решаемых в створах реки Десны, от задач, рассмотренных в работах [27-28], является уникальность геометрии каждого створа меандра, в которых ищется решение. При этом основным критерием применимости верифицируемой модели является выполнение условия сохранения массы в створе реки. Для проверки данной гипотезы авторами был выполнен ряд численных экспериментов для гидродинамического потока, протекающего в створах реки Десны расположение которых показано на рис. 2.

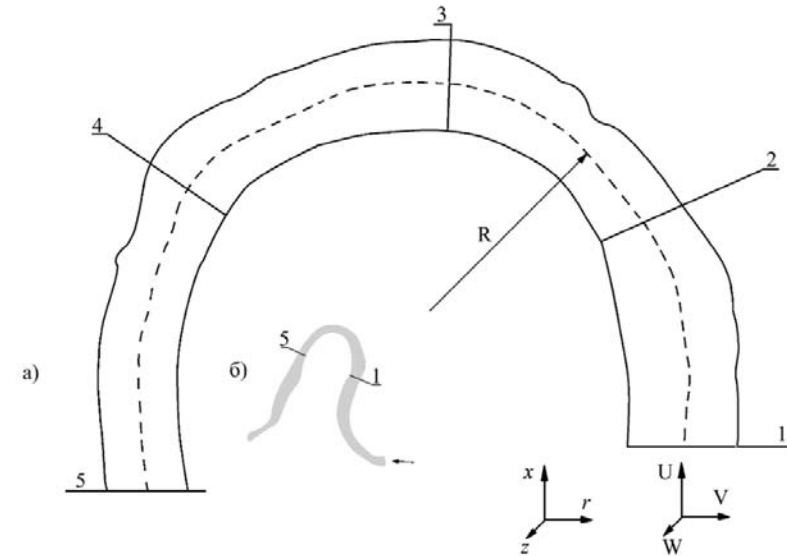


Рис. 2. Расположение створов (1, 2, 3, 4 и 5) на плане экспериментального участка реки Десны [3], R – средний радиус закругления канала, (U, V, W) – компоненты вектора скорости, осредненной по Рейнольдсу, в створах канала, согласованное с координатными осями (x, r, z) (а), расположение рассматриваемого участка от створа 1 до створа 5 на общем плане реки (б).

Fig. 2. The location of the cross-sections (1, 2, 3, 4 and 5) on the plan of the experimental section of the Desna River [3], R is the average radius of curvature of the channel, (U, V, W) are the components of the velocity vector, averaged according to Reynolds in the cross-sections of the channel, which are consistent with the coordinate axes (x, r, z) (a), the location of the area under consideration from cross-section 1 to cross-section 5 on the general plan of the river (b).

Характеристики русла, формы створов и значение полей скорости на свободной границе потока были взяты из работы [3]. С помощью предложенной математической модели (18)-(21) и алгоритма, изложенного в п.4, была решена задача о течении речного потока в 4-х створах реки Десны, геометрия створов приведена в таблице 1 и согласуется с данными натурального исследования [3]. Расчеты искомых полей в створах канала выполнялись для потока с расходом $Q_w = 184 \text{ м}^3/\text{с}$, средней скоростью потока $\bar{U}_1 = 0.47 \text{ м/с}$, $\bar{U}_3 = 0.4 \text{ м/с}$,

$\bar{U}_4 = 0.38 \text{ м/с}$, $\bar{U}_5 = 0.38 \text{ м/с}$ в каждом створе и средним радиусом закругления канала $\bar{R} = 400$ во всех рассматриваемых створах, площадь створов составляла $\bar{S}_1 = 460 \text{ м}^2$, $\bar{S}_3 = 484 \text{ м}^2$, $\bar{S}_4 = 490 \text{ м}^2$ и $\bar{S}_5 = 457 \text{ м}^2$, средний уклон русла $J = 0.0000274$. Приведенные данные согласуются со значениями натурных измерений [3]. Моделирование течения в створе 2 не проводилось ввиду недостаточности натурных данных о форме створа и полей скорости потока в работе [3].

Вычисления проводились на нерегулярной конечно-элементной сетке. Сеточная сходимость задачи проверялась последовательным сгущением расчетной сетки. Были выбраны репрезентативные расчетные сетки, содержащие 35 314, 29 214, 57 720, 61 748 конечных элемента соответственно для створов 1, 3, 4 и 5, со средним диаметром конечного элемента

$$h = \frac{\sqrt{\Omega_e}}{2} \approx 0.2 \text{ м}.$$

Расчет проводился на машине с процессором AMD Ryzen 9 5900X 12-Core и 128 Gb ОЗУ. На сетке 36027 узлов расчет занимает 203 с, на сетке 66218 узлов – 427 с.

В табл. 1 приведены отметки донной поверхности Γ_1 , которые отсчитываются от внутренней до внешней границы канала, глубина потока H в данных отметках для всех рассматриваемых в работе створов из работы [3].

При вычислении искомых полей необходимо задавать значения функции U_{Γ_1} на свободной поверхности потока (верхней границе расчетной области Γ_2) для удовлетворения граничных условий (5). Для получения функции U_{Γ_2} использовалась линейная аппроксимация по значениям окружных скоростей на свободной поверхности потока в вертикалях каждого створа, которые приведены в табл.2 из работы [3].

На рис. 3 – 10 показаны профили потоковой и радиальной скоростей в вертикалях створа, отмеченных в табл. 1 жирным шрифтом, вертикали располагаются слева направо по мере возрастания расстояния от левого берега створа. Экспериментальные измерения для каждой вертикали створа показаны на рисунках черными кругами, соединенными тонкой черной линией в областях, где данные двух смежных вертикалей накладываются друг на друга. Для каждого створа было получено численное решение по двум алгебраическим моделям турбулентности: модель van Rijn (7) и модель van Driest (8), при сравнении решений с экспериментом оказалось, что в случае моделирования створа 1 наилучшее согласование с экспериментом показала модель van Driest, так она лучше воспроизводит картину течения в каналах с «трапецевидной» формой створа. Для створов 3, 4 и 5, имеющих форму русла, близкую к форме треугольника или скошенной параболы, лучшее согласование показала модель van Rijn, что согласуется с более ранней работой авторов [27], где версия предложенной модели, замкнутая моделью турбулентности van Rijn, была успешно апробирована при решении задачи о течении в створе параболической формы. Различия между вычисленными и экспериментальными значениями скорости на вертикалях оценивались в норме L_2 для всех рассматриваемых створов.

На рис.3 показаны решения для створа 1. Видно, что решение по предложенной модели качественно полностью согласуется с экспериментом, хорошо воспроизводит форму и наполненность профиля потоковой скорости, а также распределение радиальной скорости потока. При количественном сравнении, только в вертикали 3 расчетный профиль значительно отклоняется от экспериментального, погрешность достигает 22 %, в остальных сечениях средняя относительная погрешность не превышает 10 %.

Табл. 1. Отметки донной поверхности Γ_1 от внутренней границы канала до внешней границы, глубина потока H в данных отметках для рассматриваемых в работе створов [3].

Table 1. Levels of the bed surface Γ_1 starting from the inner boundary of the channel to the outer one, the flow depth H at these locations for the cross-sections considered in the work [3].

Створ 1		Створ 3		Створ 4		Створ 5	
r [М]	H [М]	r [М]	H [М]	r [М]	H [М]	r [М]	H [М]
0	0.00	0	0	29	0	2	0
4	1.55	28.5	0.3	34	0.55	6	0.3
10.5	3.30	33	0.6	39	0.8	8	0.8
19	3.30	34	0.8	43.5	1.45	10	1.2
27	3.60	38	1.2	48.5	1.4	12.5	1.6
34.5	3.65	41.5	1.6	52	1.5	15	1.9
42.5	3.70	45	1.8	56	2.2	19	2.2
53	3.75	50	1.9	63.5	2.8	21.5	2.6
60	3.40	53.5	1.8	69.5	3.15	27.5	3.9
65	3.30	58	2	74	3.6	32	3.4
70.5	3.40	64.5	2.4	78.5	4	37	3.2
80.5	3.45	68	2.6	83.5	4	41.5	3.8
89.5	3.00	72	2.8	89	4.25	47.5	4.2
98.5	3.00	77	3.4	93	4.6	53	4.2
109.5	2.95	83	3.4	99.5	4.7	58	4.6
122	2.55	88	4	104.5	5	60	4.15
135.5	2.80	90	3.8	113	5.4	63	4.6
147	2.05	99	5	120	6.6	67	4.4
148.5	1.40	103	5.2	127	6.05	75	5.2
157.5	0.00	109	5.2	130	5.95	81.5	5
		118.5	6.1	134	6.1	88.5	5.2
		124.5	7.6	139.5	6	94.5	5.4
		127.5	6	146.5	5.6	104	6.5
		131	6	151	3	106	5.4
		141.5	4.8	155	1.2	113.5	3.9
		145	5.25	160	0	117.5	1.4
		151	3.2			120	0
		157	2.2				
		159.5	0				

При сравнении графиков радиальной скорости на рис. 4 видно, что максимальное рассогласование расчетных данных с экспериментальными данными отмечается на верхней границе створа практически для всех вертикалей. Все экспериментальные отметки радиальной скорости на верхней границе потока смещены влево относительно остальных отметок, расположенных в верхней половине потока. Вероятно, это связано с существованием ветровой нагрузки на свободную поверхность потока во время проведения измерений, что породило приповерхностное течение, которое не может быть воспроизведено в расчетах по предложенной модели. На вертикалях 5 и 6 значения радиальной скорости имеют существенную погрешность в придонной области. Такое расхождение, может быть связано с тем, что данный створ, находится в месте перегиба кривизны русла, где одна меандра переходит в другую и изгиб реки меняет направление, предложенная модель не может учесть данное явление.

Табл. 2. Измерения поперечной скорости U_{r_2} на свободной границе потока во всех рассматриваемых сечениях и значения радиальной скорости V_{r_2} в сечении 5 [3].

Table 2. Measurements of the flow velocity U_{r_2} at the flow free boundary in all the cross-sections considered and the radial velocity values V_{r_2} in the cross-section 5 [3].

Створ 1						
r [М]	19	42.5	65	89.5	109.5	135.5
U_{r_2} [М/с]	0.62	0.72	0.73	0.55	0.43	0.31
Створ 3						
r [М/с]	50	72	90	109	127.5	145
U_{r_2} [М/с]	0.27	0.47	0.52	0.47 / 0.55	0.54 / 0.5	0.55
Створ 4						
r [М/с]	52	74	99.5	120	139.5	
U_{r_2} [М/с]	0.41	0.40	0.45	0.53/0.49	0.46	
Створ 5						
r [М/с]	15	27.5	37	60	81.5	104
U_{r_2} [М/с]	0.23	0.3	0.4	0.54	0.59	0.56
V_{r_2} [М/с]	0.0175	0.0275	0.0225	0.03	0.015	0

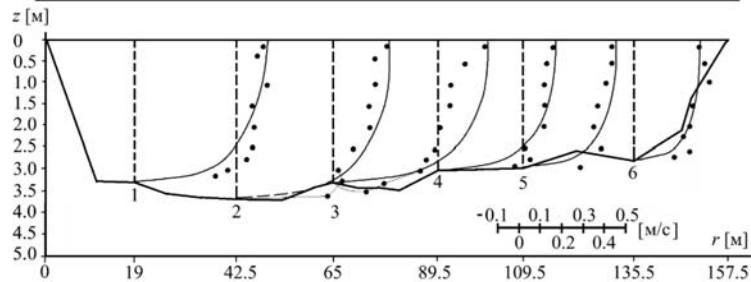


Рис. 3. Графики поперечных скоростей в сечении 1 в различных вертикалях сечения.
Fig. 3. Graphics of the flow velocities in the cross-section 1 in different verticals of the cross section.

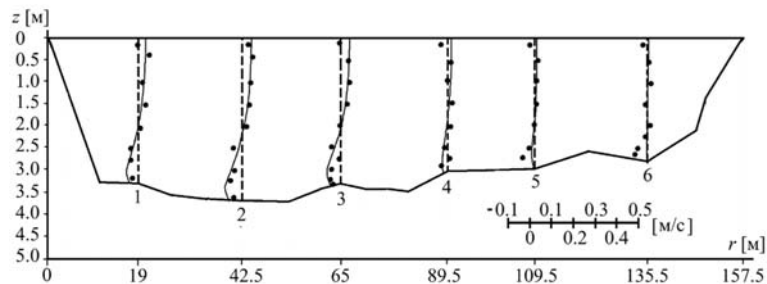


Рис. 4. Графики радиальных скоростей в сечении 1 в различных вертикалях сечения.
Fig. 4. Graphics of the radial velocities in the cross-section 1 in different verticals of the cross-section.

В остальном расчетные радиальные скорости хорошо согласуются с экспериментальными данными, средняя относительная погрешность составляет 15%, достигая 34% в местах, где экспериментальные поля скорости имеют вид ломаных линий.

На рис. 5 и 6 приводится сравнение измеренных и расчетных скоростей в сечении 3, который находится в середине излучины. При сравнении данных о потоковых скоростях в сечении видно, что модель качественно и количественно согласуется с экспериментом, максимальное отклонение графиков наблюдается для вертикали 4, достигая 19.9 % в приповерхностной области потока. У авторов нет идей, по каким причинам в экспериментальных данных существует приповерхностное торможение потока в 4 и 5 вертикали.

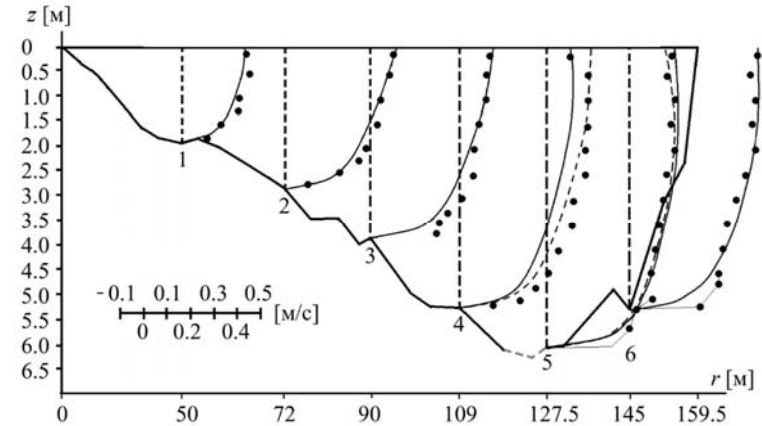


Рис. 5. Графики поперечных скоростей в сечении 3 в различных вертикалях сечения.
Fig. 5. Graphs of flow velocities in the cross-section 3 in various verticals of the cross-section.

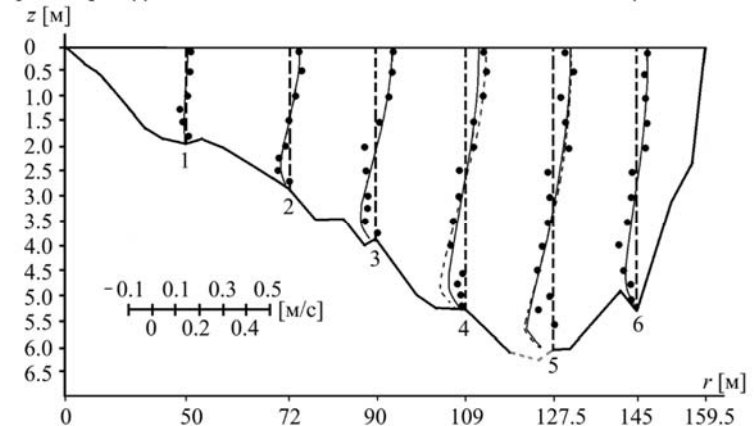


Рис. 6. Графики радиальных скоростей в сечении 3 в различных вертикалях сечения.
Fig. 6. Graphs of radial velocities in the cross-section 3 in various verticals of the cross-section.

Изменение граничных условий в этих вертикалях, взятое из интерполяции профилей скорости на свободную поверхность, привело к уменьшению общей ошибки расчета для поперечной скорости до 13 % (интерполяционные значения скоростей указаны в табл. 2 через знак «/» в соответствующей ячейке). Профили радиальной скорости качественно и количественно согласуются с экспериментом, средняя относительная погрешность по

области составляет около 14 %. Однако, в донной части вертикалей 4 и 5 ошибка достигает 75%, что, вероятно, связано с непостоянным, пульсирующим маленьким завихрением в этой области, это отображено широким разбросом экспериментальных точек в этом месте и отсутствием точных измерений глубины потока, выполненных автором [3] (отображено на рис. 5 и 6 пунктирной серой линией).

На рис. 7 и 8 приводится сравнение измеренных и расчетных скоростей в створе 4. Из сравнения полученного решения с экспериментом следует, что максимальная погрешность отклонения расчетной потоковой скорости наблюдается в вертикали 4, достигая 16.3 %. Выполняя интерполяцию для данной вертикали по технике, описанной ранее, удалось уменьшить максимальную погрешность до 9.1 % в вертикали 4. На остальных вертикалях области средняя относительная погрешность составляет около 6 %, достигая 12 % в местах, где экспериментальные данные имеют вид ломаных линий.

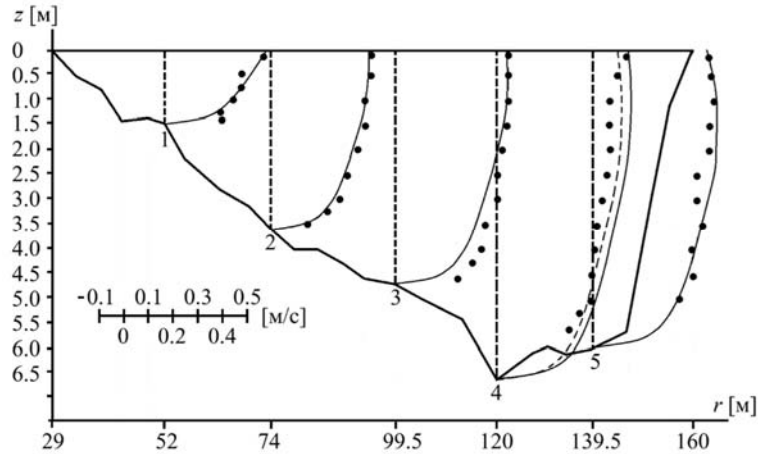


Рис. 7. Графики потоковых скоростей в створе 4 в различных вертикалях створа.
Fig.7. Graphs of flow velocities in the cross-section 4 in various verticals of the cross-section.

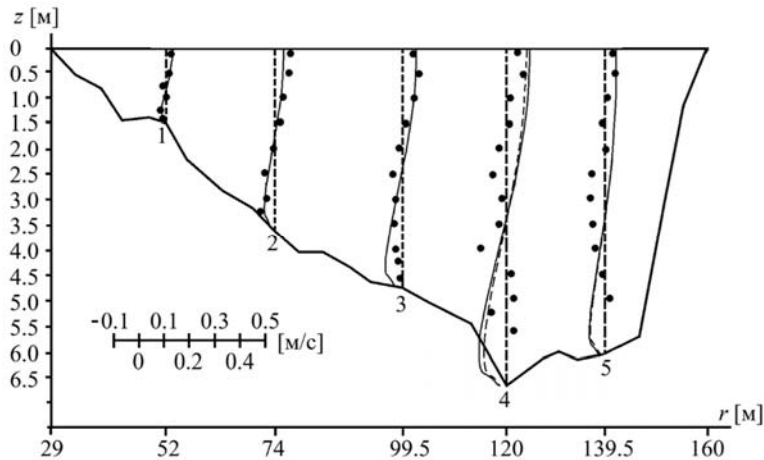


Рис. 8. Графики радиальных скоростей в створе 4 в различных вертикалях створа.
Fig. 8. Graphs of radial velocities in the cross-section 4 in various verticals of the cross-section.

Радиальные скорости в створе 4 хорошо согласуются с экспериментом в вертикалях 1-3 с погрешностью 15 %; в вертикали 3 имеется рассогласование в придонной области, где погрешность достигает 41%; в средней и придонной части вертикали 4 количественное сравнение затруднительно, поскольку экспериментальные данные имеют пилообразный вид, что, вероятно, свидетельствует о наличии в области измерений вихревых образований потока с небольшим характерным размером, что порождает значительные пульсации потока. Причиной их образования, возможно, является конфузурный характер русла в окрестности створа, что видно на рис.2. Вероятно, конфузурность русла порождает придонный обратный поток, который наблюдается на вертикали 5 (экспериментальные данные отсутствуют в придонной области и дважды пересекают нулевую отметку в средней части потока) и который не может быть воспроизведен в рамках предложенной модели.

На рис. 9 и 10 приведены поля потоковой и радиальной скоростей в створе 5.

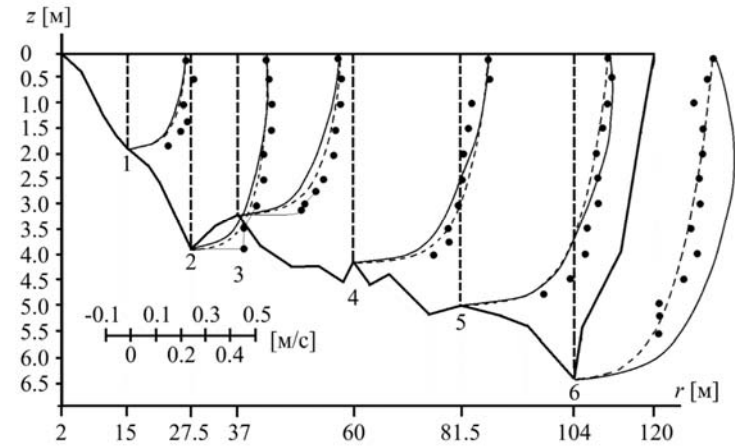


Рис. 9. Графики потоковых скоростей в створе 5 в различных вертикалях створа.
Pic. 9. Graphs of flow velocities in the cross-section 5 in various verticals of the cross-section.

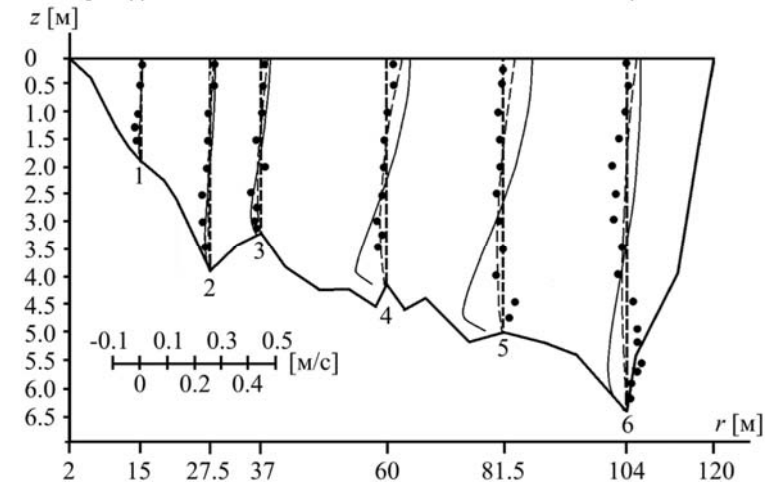


Рис. 10. Графики радиальных скоростей в створе 5 в различных вертикалях створа.
Pic. 10. Graphs of radial velocities in the cross-section 5 in various verticals of the cross-section.

Данный створ располагается в конце излуины, где русло выходит на прямолинейный участок. В силу двойственности своего расположения для данного створа было выполнено два расчета. Результаты расчетов показаны на рис. 9, 10 сплошными линиями для цилиндрической ($\sigma = 1$) постановки задачи и пунктирными линиями для плоской постановки задачи ($\sigma = 0$).

При расчете задачи в плоской постановке на свободной поверхности помимо граничных условий для скорости U задавались граничные условия Дирихле для скорости V согласно [28]. Значения радиальной скорости для створа 5 показаны в табл. 2.

При сравнении полученных результатов и экспериментальных данных для этого створа, показанных на рис. 9 и 10, видно, что решение, полученное в «плоской» постановке, существенно лучше согласуется с экспериментом для потоковой и радиальной скорости. Средняя относительная погрешность составляет 8 % для потоковой скорости и 30 % для радиальной скорости.

Отметим, что решение, полученное в цилиндрической постановке, приводит к значительным погрешностям, более 100%, для радиальных скоростей, что связано с особенностью предложенной модели, которая не предусматривает автоматического перехода к плоской постановке при выходе русла на прямолинейный участок.

Заключение

Численные исследования подтверждают возможность редукции трехмерной модели движения речного потока к двумерной модели потока в плоскости створа канала. При этом основным критерием применимости верифицируемой модели является выполнение условия сохранения массы в створе реки. Показано, что в качестве дополнительных условий для редукции задачи достаточно задания граничных условий на свободной поверхности потока для продольной компоненты скорости U , что отличает предложенную в данной работе математическую модель от предыдущих ее версий, описанных в работах [27-28].

Сравнение вычисленных полей скорости с результатами экспериментальных измерений Розовского [3] показывает хорошую согласованность расчетных и экспериментальных полей для скорости U , средняя относительная погрешность по области варьируется в пределах 6-13 % для потоковой скорости во всех рассмотренных створах. Погрешности по полю радиальной скорости V в створах канала изменяются в пределах 14-30 %.

В ходе моделирования створов реки Десны было выявлено, что предложенная модель чувствительна к недостаточности данных, которые используются для установки граничных условий для потоковой скорости U . В створе 3 искажения в значениях скорости U на свободной поверхности потока на 17 % привело к возрастанию погрешности решения на 9.5 % по всей вертикали створа, но не привело к искажениям решения на смежных вертикалях. На примере расчетов, выполненных для створа 5, показано, что для моделирования потока на выходе из излуины необходимо использовать «плоскую» постановку задачи.

Список литературы / References

1. Маккавеев В. М. Режим естественных водных потоков. В кн.: Маккавеев В. М. и Коновалова И. М. Гидравлика. Л.; М., 1940, с. 565–636. / Makkaveev V.M. Rejim estestvennih vodnih potokov [Regime of natural water flows]. M.: Hydravlika, 1940, pp. 565-636 (in Russian).
2. Потапов М. В. Регулирование водных потоков методом искусственной поперечной циркуляции/ М. В. Потапов – М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1947, 76 с. / Potapov M. V. Regulirovanie vodnih potokov metodom iskustvennoy poperechnoy cirkulatsiyi [Regulation of water flows using the method of artificial transverse circulation]. M.: Izd-vo Akad. nauk USSR, 1947, 76 p. (in Russian).
3. Розовский И.Л. Движение воды на повороте русла. К.: Наука. 1957, 187 с. / Rozovskiy I.L. Dvijenie vodi na povorote rusla [Movement of water at a bend in the riverbed], K.: Nauka, 1957, 187 p. (in Russian).

4. de Vriend H. J., Koch F. G. Flow of water in a curved channel with a fixed uneven bed. Report on experimental and theoretical investigations. R 657-VI, M 1415 part II, 1978, 69 p. DOI: 10.13140/RG.2.1.4134.7044.
5. Blanckaert K., Graf W. H. Mean flow and turbulence in open-channel bend. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2001, vol. 127, pp. 835-847.
6. Booij R. Measurements and large eddy simulations of the flows in some curved flumes. *Journal of Turbulence*, 2003, vol. 4, pp. 1-17.
7. Roca M., Martin Vide J.P., Blanckaert K. Reduction of bend scour by an outer bank footing: Footing design and bed topography. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2007, vol. 133, pp. 139-147.
8. Kadia S., Lia L., Albayrak I., Pummer E. The effect of cross-sectional geometry on the high-speed narrow open channel flows: An updated Reynolds stress model study. *Computers and Fluids*, 2024, vol. 271, 106184. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793024000161>, accessed 14.05.2025.
9. Yan X., Rennie C. D., Mohammadian A. A three-dimensional numerical study of flow characteristics in strongly curved channel bends with different side slopes. *Environmental Fluid Mechanics*, 2020, vol. 20, pp. 1491-1510. DOI: 10.1007/s10652-020-09751-9.
10. Khosronejad A., Rennie C. D., Neyshabouri S. A. A. S., Townsend R. D. 3D numerical modeling of flow and sediment transport in laboratory channel bends. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2007, vol. 133, pp. 1123-1134.
11. Gholami A., Akhtari A. A., Minatour Y., Bonakdari H., Javadi A. A. Experimental and numerical study on velocity fields and water surface profile in a strongly-curved 90° open channel bend. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 2014, vol. 8, no. 3, pp. 447-461.
12. Stoesser T., Ruether N., Olsen N. R. B. Calculation of primary and secondary flow and boundary shear stresses in a meandering channel. *Advances in Water Resources*, 2010, vol. 33, pp. 158-170.
13. Liu Y., Chai Y., Yu M., Zhou Y. Influences of channel bed morphology on flow structures in continuous curved channels. *Frontiers in Environmental Science*, 2024, vol. 12, pp. 1431021. Available at: <https://www.frontiersin.org/journals/environmental-science/articles/10.3389/fenvs.2024.1431021>, accessed 14.05.2025.
14. Lazzarin, T., Viero, D. P. Curvature-induced secondary flow in 2D depth-averaged hydro-morphodynamic models: An assessment of different approaches and key factors. *Advances in Water Resources*, 2023, vol. 171, 104355. DOI: 10.1016/j.advwatres.2022.104355.
15. Lv, P., Kong, L., Chuo, R., Liu, H., Cai, S., Zhao, M. Application of One-Dimensional Hydrodynamic Coupling Model in Complex River Channels: Taking the Yongding River as an Example. *Water*, 2024, vol. 16, 1161. DOI: 10.3390/w16081161.
16. Pareta, K. 1D-2D hydrodynamic and sediment transport modelling using MIKE models. *Discov Water*, 2024, vol. 4, 94. DOI: 10.1007/s43832-024-00130-9.
17. Badawy, N.A.-M., El-Hazek, A.N., El-Sersawy, H.M., Mohammed, E.R. Modeling the hydrodynamic interactions between the river morphology and navigation channel operations. *Journal of Water and Land Development*, 2021, no. 51 (X–XII), pp. 1-10. DOI:10.24425/jwld.2021.139008.
18. Shaheed R.; Mohammadian A.; Yan X. A Review of numerical simulations of secondary flows in river bends. *Water*, 2021, vol. 13., no. 7, p. 884. Available at: <https://www.mdpi.com/2073-4441/13/7/884>, accessed 14.05.2025.
19. Struiksma N., Olesen K. W., Flokstra C., de Vriend H. J. Bed deformation in curved alluvial channels. *Journal of Hydraulic Research*, 1985, vol. 23, no. 1, pp. 57-79.
20. de Almeida J. R. M., Ota J. J. Comparative study between turbulence models in curved channels. *RBRH, Porto Alegre*, 2020, vol. 25, e21, pp. 1-18.
21. Wang Z. Q., Cheng N. S. Time-mean structure of secondary flows in open channel with longitudinal bedforms. *Advances in Water Resources*, 2006, vol. 29, no. 11, pp. 1634-1649.
22. Fischer H.B. The effects of bends on dispersion in streams. *Water Resources Research*, 1969, vol. 5, pp. 496–506.
23. Kean J. W., Kuhnle R. A., Smith J. D., Alonso C. V., Langendoen E. J. Test of a method to calculate near-bank velocity and boundary shear stress. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2009, vol. 135, no. 7, pp. 588-601. DOI: 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000049.
24. Yang Sh.-Q., Lim S.-Y. Boundary shear stress distributions in trapezoidal channels. *Journal of Hydraulic Research*, 2005, vol. 43, no. 1, pp. 98-102.
25. Javid S., Mohammadi M. Boundary shear stress in a trapezoidal channel. *IJE Transactions A: Basics*, 2012, vol. 25, no. 4, pp. 323-331.

- [26]. Figueres J. A., Galán A., González J. an enhanced treatment of boundary conditions for 2D RANS streamwise velocity models in open channel flow. *Water*, 2021, vol. 13, no. 1, p. 1001. Available at: <https://www.mdpi.com/2073-4441/13/7/1001>, accessed 14.05.2025.
- [27]. Потапов И.И., Потапов Д.И. Модель установившегося течения реки в поперечном сечении изогнутого русла. Компьютерные исследования и моделирование, 2024, т. 16, № 5, с. 1163-1178. / Potapov I.I., Potapov D.I. Model' ustanovivshegosya techeniya reki v poperechnom sечenii izognutogo rusla [Model of steady river flow in the cross section of a curved channel]. *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 5, pp. 1163-1178 (in Russian).
- [28]. Потапов И. И., Потапов Д. И., Королева К. С. О движении речного потока в сечении изогнутого русла. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2024, т. 34, вып. 4, с. 577-593. / Potapov I. I., Potapov D. I., Koroleva K. S. O dvizhenii rechnogo potoka v sечenii izognutogo rusla [On the river flow motion in the bend channel cross-section]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, no. 4, pp. 577-593 (in Russian).
- [29]. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980, 616 с. / Rouch P. *Vichislitel'naya hydrodinamika* [Computational fluid dynamics]. M.: Mir, 1980, 616 p. (in Russian).
- [30]. van Rijn L. C. Sediment transport, part II: suspended load transport. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1984, vol. 110, no. 11, pp. 1613-1641.
- [31]. van Driest E. R. On turbulent flow near a wall. *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 23, pp. 1007-1011. DOI: 10.2514/8.3713.
- [32]. Шабров Н. Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983, 212 с. / Shabrov N. N. *Metod konechnih elementov v raschyotov detalei teplovihi dvigateley* [Finite element method in calculations of heat engine parts]. L.: Mashinostroeniye, 1983, 212 p. (in Russian).
- [33]. Булгаков В.К., Потапов И. И. Сравнительный анализ противопоточных конечно-элементных схем высокого порядка для задачи Навье-Стокса на основе модифицированного SUPG-метода. Дальневосточный математический журнал, 2003, том 4, № 1, с. 5 -17. / Bulkagov V.K., Potapov I. I. *Sravnitel'niy analiz protivopotochnih konechno-elementnih skhem visokovo poryadka dlya zadachi Navie-Stoksa na osnove modivitsirovannogo SUPG-metoda* [Comparative analysis of high-order upwind finite element schemes for the Navier-Stokes problem based on the modified SUPG method]. *Dalnevostochniy matematicheskiy journal*, 2003, vol. 4, no. 1, pp. 5-17 (in Russian).
- [34]. Потапов И.И. Информационная система «Амур», 2025. Available at: <https://github.com/PotapovII/Amur>, accessed 22.05.2025.

Информация об авторах / Information about authors

Ксения Сергеевна КОРОЛЕВА – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории вычислительной механики Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук, работает в лаборатории с 2010 г. Сфера научных интересов: математическое моделирование русловых процессов для равнинных рек, вычислительная гидродинамика, численные методы, транспорт донных наносов и эволюция донной поверхности во времени, вторичные потоки.

Kseniia Sergeevna KOROLIOVA – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior researcher of the Laboratory of Computational Mechanics of Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences since 2010. Research interests: mathematical modeling of riverbed morphodynamic processes in lowland rivers, computational hydrodynamics, numerical methods, bed sediment transport and bed evolution in time, secondary flows.

Игорь Иванович ПОТАПОВ, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник и зав. лаборатории вычислительной механики Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук с 2009 г. Сфера научных интересов: вычислительная механика, вычислительная гидродинамика, численные методы, проекционные сеточные и без сеточные методы решения задач, русловые процессы в равнинных реках.

Igor Ivanovich POTAPOV – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Chief researcher and Head of the Laboratory of Computational Mechanics of Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences since 2009. Research interests: computational mechanics, computational fluid dynamics, numerical methods, projection grid and gridless methods for problems solving, channel morphodynamic processes in lowland rivers.

Дмитрий Игоревич ПОТАПОВ – аспирант, младший научный сотрудник лаборатории вычислительной механики Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук. Сфера научных интересов: численные методы, береговые и русловые процессы в равнинных реках.

Dmitry Igorevich POTAPOV – Postgraduate Student and Junior Researcher of the Laboratory of Computational Mechanics of Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences. Research interests: numerical methods, riverbank and riverbed morphodynamic processes in lowland rivers.