

DOI: 10.15514/ISPRAS-2026-38(3)-15



## Построение местной гидродинамической модели потока через переливную запруду Пемзенская реки Амур

И.И. Потапов, ORCID: 0000-0002-3323-2727 <potapov2i@gmail.com>

Ю.Г. Силакова, ORCID: 0000-0002-1435-9829 <krat\_yuliya@mail.ru>

Вычислительный центр ДВО РАН,  
Россия, 109004, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65.

**Аннотация.** В работе сформулирована математическая модель речного потока для протоки Пемзенская реки Амур. Средствами информационной системы «Амур» выполнена конечно-элементная реализация решателя задачи. Выполнена верификация модели и алгоритмов расчета. Информация о рельефе донной поверхности русла и графики уровня реки Амур, необходимые для определения краевых условий задачи, были получены из информационной системы «Амур». Приведены расчетные отметки уровней воды и скоростные поля течения протоки при выбранном коэффициенте шероховатости.

**Ключевые слова:** русловые процессы; плановые уравнения мелкой воды; метод конечных элементов; информационная система; протока Пемзенская; река Амур.

**Для цитирования:** Потапов И.И., Силакова Ю.Г. Построение местной гидродинамической модели потока через переливную запруду Пемзенская реки Амур. Труды ИСП РАН, том 38, вып. 3, часть 1, 2026 г., стр. 241–256. DOI: 10.15514/ISPRAS-2026-38(3)-15.

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда № 24-17-20009 и гранта Правительства Хабаровского края (соглашение № 108С/2024 от 31.07.2024 г.).

## Construction of a local hydrodynamic model of the flow through the Pemzenskaya overflow dam of the Amur River

I.I. Potapov, ORCID: 0000-0002-3323-2727 <potapov2i@gmail.com>

Yu.G. Silakova, ORCID: 0000-0002-1435-9829 <krat\_yuliya@mail.ru>

Computer center of far East Branch of the Russian Academy of Sciences,  
65 Kim U Chena Street, Khabarovsk City, 680000, Russia.

**Abstract.** This paper formulates a mathematical model of river flow for the Pemzenskaya channel of the Amur River. A finite element implementation of the problem solver was implemented using the Amur information system. The model and calculation algorithms were verified. Information on the channel's bottom surface topography and Amur River level graphs, necessary for determining the boundary conditions of the problem, were obtained from the Amur information system. Estimated water level marks and flow velocity fields for the channel are presented for the selected roughness coefficient.

**Keywords:** channel processes; shallow water planning equations; finite element method; information system; Pemzenskaya channel; Amur River.

**For citation:** Potapov I.I., Silakova Yu.G. Construction of a local hydrodynamic model of the flow through the Pemzenskaya overflow dam of the Amur River/Proc. ISP RAS, vol. 38, issue 3, part 1, 2026, pp. 241-256 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2026-38(3)-15.

**Acknowledgements.** The study was supported by grant No. 24-17-20009 from the Russian Science Foundation and a grant from the Government of Khabarovsk Krai (Agreement No. 108C/2024 dated July 31, 2024).

### 1. Введение

На территории Хабаровского водного узла, являющегося частью реки Амур, сосредоточены разнообразные инженерные и водохозяйственные сооружения. Для обеспечения их безопасного функционирования необходимо учитывать особенности водного режима реки. Это обстоятельство обусловило необходимость проведения многочисленных исследований, посвященных изучению русловых процессов [1-5], в том числе с применением методов математического моделирования [3, 6-8].

Современные подходы к моделированию русловых процессов основываются на численном решении систем дифференциальных уравнений, описывающих гидродинамику, транспорт наносов и деформацию русла. Широко распространенные модели, такие как HEC-RAS, MIKE и Delft3D, способны моделировать изменения береговой линии при изменении расхода воды, включая выход потока на пойму. Каждая из них имеет свои особенности и области применения. Обзор по развитию математических моделей для речных бассейнов представлен в работе [9].

В данной работе для моделирования движения гидродинамического потока протоки Пемзенская авторы используют информационную систему «Амур» [12], которая разрабатывается авторами в лаборатории «Вычислительная механика» Вычислительного центра ДВО РАН. ИС «Амур» разработана для анализа гидродинамических и русловых процессов в реке Амур и ее протоках. Включает инструменты для численного исследования полей течения и визуализации результатов.

Актуальность данного исследования связана с текущим состоянием переливной запруды протоки Пемзенская реки Амур, находящейся в стадии активного разрушения вследствие образования прорана в теле запруды в непосредственной близости от ее правого берега.

Одним из перспективных методов, позволяющих детально оценить пространственное распределение характеристик водного потока протоки являются двумерные (плановые) гидродинамические модели, основанные на уравнениях мелкой воды [7-11]. Такие модели

позволяют получить плановую картину распределения осредненных по вертикали скоростей течения, уровней водной поверхности и глубин потока в пределах расчетной области.

В работе предложена местная гидродинамическая модель, основанная на плановых уравнениях мелкой воды. Предложенная модель решалась методом конечных элементов в формулировке Петрова-Галеркина. Верификация численной модели проводилась на участке протоки Пемзенская реки Амур от села Владимировка длиной 2 км, где в узком ее месте была построена переливная запруда. В качестве калибровочных параметров были взяты уровни водной поверхности потока и коэффициент донной шероховатости. Поэтому можно проследить гидродинамику потока в окрестности переливной запруды для различных расходов воды, проходящих через русло протоки. Приведены расчетные отметки уровней воды и скоростные поля течения протоки для заданного коэффициента шероховатости.

## 2. Математическая постановка задачи

В работе рассматривается задача о движении водного потока в протоке Пемзенская реки Амур при заданном коэффициенте шероховатости. На рис. 1 представлена расчетная область задачи  $\Omega$ , которая имеет границу входа  $\Gamma_{in}$ , границу выхода  $\Gamma_{out}$  и береговые границы  $\Gamma_0$ . Изобаты рельефа расчетной области показывают рельеф дна  $\zeta$  протоки, полученные из информационной системы «Амур» [12].

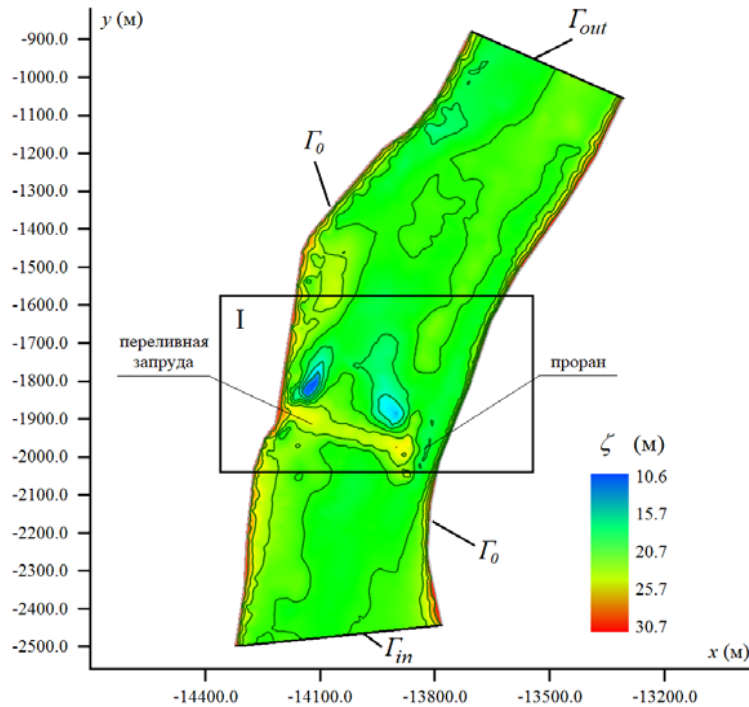


Рис. 1 Расчетная область  $\Omega$  и ее границы  $\Gamma_{in}$ ,  $\Gamma_{out}$  и  $\Gamma_0$ .  
Fig. 1 Calculation domain  $\Omega$  and its boundaries  $\Gamma_{in}$ ,  $\Gamma_{out}$  и  $\Gamma_0$ .

Математическая постановка рассматриваемой задачи включает в себя:

- двумерные плановые уравнения мелкой воды [11]:

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial(Uq_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Vq_x)}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x} = gH(J_x - J_{fx}) + \frac{1}{\rho_w} \left( \frac{\partial(H\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(H\tau_{xy})}{\partial y} + \tau_{ax} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial(Uq_y)}{\partial x} + \frac{\partial(Vq_y)}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial H^2}{\partial y} = gH(J_y - J_{fy}) + \frac{1}{\rho_w} \left( \frac{\partial(H\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(H\tau_{yy})}{\partial y} + \tau_{ay} \right). \quad (2)$$

- уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

На незатопленных участках расчетной области движение потока будем описывать в рамках фильтрационной модели

$$\frac{\partial H}{\partial t} - D_H \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$q_x = -D_H \frac{\partial H}{\partial x}, \quad q_y = -D_H \frac{\partial H}{\partial y}, \quad (5)$$

где  $x$  и  $y$  – декартовы координаты в горизонтальной плоскости;  $t$  – время;  $H$  – глубина потока;  $q_x$  и  $q_y$  – компоненты вектора расхода на единицу ширины;  $U, V$  – компоненты осредненной по глубине скорости, которые связаны с  $q_x$  и  $q_y$  как  $U = q_x/H$  и  $V = q_y/H$ ;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\rho_w$  – плотность воды;  $D_H$  – коэффициент фильтрации;  $J_x = \frac{\partial \zeta}{\partial x}$  и  $J_y = \frac{\partial \zeta}{\partial y}$

представляют собой компоненты вектора уклона дна;  $\zeta$  – отметки донной поверхности,  $J_{fx}$  и  $J_{fy}$  – компоненты вектора трения потока о дно, определяемые по формулам:

$$J_{fx} = \frac{U\sqrt{U^2 + V^2}}{C_s^2 g H}, \quad J_{fy} = \frac{V\sqrt{U^2 + V^2}}{C_s^2 g H}. \quad (6)$$

Здесь  $C_s$  – безразмерный коэффициент Шези, рассчитываемый по формуле [13]

$$C_s = \frac{1}{\kappa} \begin{cases} \ln(h), & h > 7.4 \\ 1 + 7.4h, & h = 12 \frac{H}{k_s} \end{cases}, \quad (7)$$

где  $k_s$  – высота шероховатости дна (м);  $\kappa = 0.4$  – параметр Кармана.

Для замыкания уравнений (1)-(3) используется модель турбулентности Рейнольдса, связывающая турбулентные напряжения  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yy}$  со средними градиентами скорости потока

$$\tau_{xx} = 2\rho_w \nu_t \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = 2\rho_w \nu_t \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \rho_w \nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad (8)$$

где  $\nu_t$  – вихревая вязкость потока, которая в открытых каналах определяется в рамках алгебраической модели [3]  $\nu_t = \nu_{0t} u_* H$ . Здесь  $u_* = \sqrt{gHJ_f}$  – скорость сдвига, где  $J_f = \frac{U^2 + V^2}{C_s^2 g H}$ .

Учет ветровой нагрузки на свободную поверхность потока осуществляется в рамках модели [14]:

$$\tau_{ax} = C_D \rho_a U_a \sqrt{U_a^2 + V_a^2}, \quad \tau_{ay} = C_D \rho_a V_a \sqrt{U_a^2 + V_a^2}, \quad (9)$$

где  $C_D$  – безразмерный коэффициент сопротивления;  $\rho_a$  – плотность воздуха;  $U_a, V_a$  – компоненты вектора скорости ветра.

Уравнения «смоченного» русла (1)-(3) замыкаются начальными условиями

$$H = H_0, q_x = q_{x0}, q_y = q_{y0}, t = t_0. \quad (10)$$

Уравнения «сухого» русла (4)-(5) замыкаются начальными условиями

$$H = H_0, t = t_0. \quad (11)$$

Граничные условия задаются через глубину потока  $H$ , нормальный и тангенциальный расход потока  $q_n$  и  $q_t$  соответственно. Расходы  $q_x$  и  $q_y$  связаны расходами с  $q_n$  и компонентами матрицы поворота  $M_\Gamma$ , определяемой через касательный вектор к границе области

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = M_\Gamma \begin{pmatrix} q_n \\ q_t \end{pmatrix}.$$

Вычисляя локальное число Фруда  $Fr = \frac{|\vec{W}|}{\sqrt{gH}} = \sqrt{\frac{U^2 + V^2}{gH}}$  на элементе границы  $\Gamma$

определим на докритических граница притока ( $Fr < 1$ ) расходы

$$q_n = q_n^{in}, q_t = q_t^{in}, \bar{x} \in \Gamma_{in}, \quad (12)$$

на докритических границах оттока определяется глубина потока

$$H = H^{out}, \bar{x} \in \Gamma_{out}. \quad (13)$$

На сверхкритических границах притока ( $Fr > 1$ ), расходы и глубину потока

$$q_n = q_n^{in}, q_t = q_t^{in}, H = H^{in}, \bar{x} \in \Gamma_{in}, \quad (14)$$

на сверхкритических границах оттока граничные условия не определяются.

На границах установления фильтрационного потока устанавливаем однородный градиент глубины

$$\frac{\partial H}{\partial x} n_x + \frac{\partial H}{\partial y} n_y = 0, \bar{x} \in \Gamma_0. \quad (15)$$

### 3. Слабая формулировка гидродинамической задачи

Слабая формулировка задачи (1)-(15) имеет вид

$$\int_{\Omega} L_\alpha \rho_w \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial (M_x \phi)}{\partial x} + \frac{\partial (M_y \phi)}{\partial y} + N \phi \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho_w v_i \frac{\partial L_\alpha}{\partial x} \left( D_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} - D_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho_w v_i \frac{\partial L_\alpha}{\partial y} \left( D_{yx} \frac{\partial \phi}{\partial x} - D_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_{out}} L_\alpha \rho_w \left( n_x \left( v_i \left( D_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} - D_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right) + n_y \left( v_i \left( D_{yx} \frac{\partial \phi}{\partial x} - D_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right) + N \phi \right) d\Omega = 0 \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} N_\alpha \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} D_H \left( \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (17)$$

$$\int_{\Omega} N_\alpha \left( q_x + D_H \frac{\partial H}{\partial x} \right) d\Omega = 0, \int_{\Omega} N_\alpha \left( q_y + D_H \frac{\partial H}{\partial y} \right) d\Omega = 0, \quad (18)$$

где

$$\phi = \begin{pmatrix} H \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix}, M_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ g \frac{H}{2} & U & 0 \\ 0 & 0 & U \end{pmatrix}, M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & V & 0 \\ g \frac{H}{2} & 0 & V \end{pmatrix},$$

$$D_{xx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2U & 2 & 0 \\ -V & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -U & 1 & 0 \end{pmatrix}, D_{yx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -V & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_{yy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -U & 1 & 0 \\ -2V & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g J_x & \frac{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}}{C_s^2 H^2} & 0 \\ -g J_y & 0 & \frac{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}}{C_s^2 H^2} \end{pmatrix}.$$

### 4. Дискретный аналог задачи

Для решения сформулированной задачи в постановке (1)-(15) использовался метод конечных элементов в формулировке Петрова-Галеркина.

Дискретная область задачи  $\Omega$  представлена нерегулярной триангуляцией  $\Omega^h = \bigcup_e \Omega_e$ . Для

каждого конечного элемента  $\Omega_e$  определим формулы формы  $N_\alpha$  [15]:

$$N_\alpha = a_\alpha + b_\alpha x + c_\alpha y, \quad (19)$$

и их градиенты

$$b_\alpha = \frac{\partial N_\alpha}{\partial x}, \quad c_\alpha = \frac{\partial N_\alpha}{\partial y}, \quad (20)$$

где коэффициенты полиномов (19) выражаются следующим образом

$$\begin{cases} a_1 = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2S}, b_1 = \frac{y_2 - y_3}{2S}, c_1 = \frac{x_3 - x_2}{2S} \\ a_2 = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{2S}, b_2 = \frac{y_3 - y_1}{2S}, c_2 = \frac{x_1 - x_3}{2S} \\ a_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2S}, b_3 = \frac{y_1 - y_2}{2S}, c_3 = \frac{x_2 - x_1}{2S} \end{cases}$$

Для определения аппроксимации искомых функций на конечных элементах  $\Omega_e$ , будем использовать функции формы (19)

$$H^h = N_\alpha H_\alpha, \quad q_x^h = N_\alpha q_{x\alpha}, \quad q_y^h = N_\alpha q_{y\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (21)$$

$$U^h = N_\alpha U_\alpha, \quad V^h = N_\alpha V_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (22)$$

и внешних полей

$$v_i^h = N_\alpha v_{i\alpha}, \quad x = N_\alpha x_\alpha, \quad y = N_\alpha y_\alpha, \quad \zeta = N_\alpha \zeta_\alpha, \quad (23)$$

где  $H_\alpha$ ,  $q_{x\alpha}$ ,  $q_{y\alpha}$ ,  $U_\alpha$ ,  $V_\alpha$ ,  $\zeta_\alpha$  - значение искомых функций в узлах конечно-элементной сетки.

Для противопоточной стабилизации дискретных аналогов задачи для уравнений, содержащих конвективные члены, воспользуемся методом Петрова-Галеркина (SUPG) [16] с весовыми функциями  $L_\alpha$

$$L_\alpha = N_\alpha + B_\alpha, \quad B_\alpha = \omega h (a_x b_\alpha + a_y c_\alpha), \quad (24)$$

где

$$a_x = \frac{\bar{U}}{\sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}}, \quad a_y = \frac{\bar{V}}{\sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}}, \quad h = \frac{\sqrt{\Omega_e}}{2}, \quad 0.5 \leq \omega \leq 1.$$

Переход от узловых значений искомых функций к значениям на элементах будем выполнять по формулам

$$\bar{H} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 H_\alpha, \quad \bar{U} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 U_\alpha, \quad \bar{V} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 V_\alpha, \quad q_x = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 q_{x\alpha}, \quad q_y = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 q_{y\alpha}. \quad (25)$$

### 5. Конечно-элементный дискретный аналог задачи

Для компактной записи дискретного аналога тождества (16) введем матрицы конвекции  $A_x$  и  $A_y$ ,

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - U^2 & 2U & 0 \\ -UV & V & U \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -UV & V & U \\ c^2 - U^2 & 0 & 2V \end{pmatrix}.$$

Тогда с учетом (19)-(25) получим для речного потока

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_w L_\alpha N_\beta d\Omega \frac{d\phi_\beta}{dt} + \int_{\Omega} \rho_w N L_\alpha N_\beta d\Omega \phi_\beta - \\ & - \int_{\Omega} \rho_w (M_x b_\alpha + M_y c_\alpha) N_\beta d\Omega \phi_\beta + \int_{\Omega} \rho_w B_\alpha (A_x b_\beta + A_y c_\beta) d\Omega \phi_\beta + \\ & + \int_{\Omega} \rho_w v_t (D_{xx} b_\alpha b_\beta + D_{xy} b_\alpha c_\beta + D_{yx} c_\alpha b_\beta + D_{yy} c_\alpha c_\beta) d\Omega \phi_\beta - \\ & - \int_{\Omega} \rho_w B_\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} (v_t D_{xx} b_\beta + v_t D_{xy} c_\beta) + \frac{\partial}{\partial y} (v_t D_{yx} b_\beta - v_t D_{yy} c_\beta) \right) d\Omega \phi_\beta + \\ & + \int_{\Gamma_{out}} \rho_w (n_x M_x + n_y M_y) N_\alpha N_\beta d\Gamma \phi_\beta - \\ & - \int_{\Gamma_{out}} \rho_w v_t N_\alpha (n_x (D_{xx} b_\beta + D_{xy} c_\beta) + n_y (D_{yx} b_\beta - D_{yy} c_\beta)) d\Gamma \phi_\beta = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Для фильтрационного потока

$$\int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} N_\alpha N_\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\Omega \frac{d\phi_\beta}{dt} + \int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} D_H (b_\alpha b_\beta + c_\alpha c_\beta) & 0 & 0 \\ D_H N_\alpha b_\beta & N_\alpha N_\beta & 0 \\ D_H N_\alpha c_\beta & 0 & N_\alpha N_\beta \end{pmatrix} d\Omega \phi_\beta = 0 \quad (27)$$

Отметим, что поскольку узловое значение функции  $\phi_\alpha$  является функцией только от времени, то частную производную по времени в дискретном аналоге (26)-(27) можно заменить обычной производной.

При вычислении дискретных аналогов (26)-(27) используется смешанное интегрирование. Для случаев чистой воды или сухого берега применяются аналитические формулы интегрирования симплекс функций.

При расчетах дискретных аналогов, описывающих движение речного потока, для конечных элементов, расположенных в смоченной области, дискретный аналог вычисляется по уравнению (26), для конечных элементов, расположенных в сухой области - по уравнению (27). Для конечных элементов часть узлов, которых принадлежит смоченной и сухой области, выполняется численное интегрирование высокого порядка (рис. 2). При этом квадратурные точки, попадающие в смоченную область, вычисляются для уравнения (26), а в сухой области - по уравнению (27).

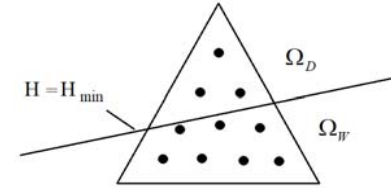


Рис. 2. Разделение квадратурных точек на конечном элементе береговой линией  $\Gamma_0$  на принадлежность их к сухой и смоченной расчетной области.

Fig. 2. Separation of quadrature points on the finite element by the coastline  $\Gamma_0$  into their belonging to the dry and wetted computational domain.

Применение конечных разностей для производной по времени в (26)-(27) с помощью оператора невязности [15]  $\theta \in [0,1]$  с  $\theta=0$  для явного решения и  $\theta=1$  для полностью неявного решения дает следующие рекуррентные схемы:

$$\begin{aligned} & (\bar{M}_{\alpha\beta} + \Delta t \theta (\bar{K}_{\alpha\beta} + \overline{BK}_{\alpha\beta} \overline{CBC})) \hat{\phi}_\beta^{n+1} + \Delta t \theta (\overline{BK}_{\alpha\beta} \overline{BC}) \hat{\phi}_\beta^{n+1} = \\ & (\bar{M}_{\alpha\beta} - \Delta t (1-\theta) (\bar{K}_{\alpha\beta} + \overline{BK}_{\alpha\beta} \overline{CBC})) \hat{\phi}_\beta^n - \Delta t (1-\theta) (\overline{BK}_{\alpha\beta} \overline{BC}) \hat{\phi}_\beta^n \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\alpha\beta} &= \int_{\Omega} \rho_w N L_\alpha N_\beta d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \rho_w (M_x b_\alpha + M_y c_\alpha) N_\beta d\Omega + \int_{\Omega} \rho_w B_\alpha (A_x b_\beta + A_y c_\beta) d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \rho_w v_t (D_{xx} b_\alpha b_\beta + D_{xy} c_\alpha c_\beta + D_{yx} c_\alpha b_\beta + D_{yy} c_\alpha c_\beta) d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \rho_w v_t B_\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} (D_{xx} b_\beta + v_t D_{xy} c_\beta) + \frac{\partial}{\partial y} (D_{yx} b_\beta - v_t D_{yy} c_\beta) \right) d\Omega \\ \overline{BK}_{\alpha\beta} &= \int_{\Gamma} \rho_w (n_x M_x + n_y M_y) N_\alpha N_\beta d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma} \rho_w v_t N_\alpha (n_x (D_{xx} b_\beta + D_{xy} c_\beta) + n_y (D_{yx} b_\beta - D_{yy} c_\beta)) d\Gamma \\ \bar{M}_{\alpha\beta} &= \int_{\Omega} \rho_w L_\alpha N_\beta d\Omega. \end{aligned}$$

Здесь  $\hat{\phi}_\alpha$  – вектор известных граничных значений  $\hat{H}$ ,  $\hat{q}_x$ ,  $\hat{q}_y$  на границах  $\Gamma_{in}$ ,  $\Gamma_{out}$ . Матрица  $\overline{BK}_{\alpha\beta}$  является результатом граничного интеграла. Матрица  $\overline{BC}$  – это диагональная

матрица, где единица на диагонали соответствует известному значению переменных на границе и ноль - неизвестному значению переменных на границе. Матрица  $\overline{CBC} = I - \overline{BC}$ ,  $I$  – единичная матрица. Например, для случая подкритической границы притока, где  $\hat{q}_x$  и  $\hat{q}_y$  известны, а его значение неизвестно, матрица  $\overline{BC}$  будет равна:

$$\overline{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

в то время как  $\overline{CBC}$  был бы равен:

$$\overline{CBC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

## 6. Алгоритм решения задачи в информационной системе «Амур»

Алгоритм расчета задачи (1)-(15) включает следующие этапы:

1. Выгрузка выборки данных о морфологии русла из базы данных информационной системы «Амур» (рис. 3а).
2. Построение контура расчетной области для отсека лишних данных. Формирование линий сглаживания в расчетной области для выделения областей сгущения триангуляционной сетки и при необходимости удлинения расчетной области (рис. 3а).
3. Построение первичной триангуляционной сетки по экспериментальным точкам наблюдения (рис. 3б).
4. Построение расчетной сглаженной триангуляционной сетки для заданного среднего размера конечного элемента (рис. 4б, 4с). Перенос донных отметок с первичной триангуляционной сетки (рис. 3б) на расчетную сетку (рис. 4б, 4с).
5. Выделение границ притока и оттока и определение для них расхода  $q_n^{in}$  и отметок свободной поверхности  $\eta(t)$  (глубин  $H = \eta(t) + \zeta$ ) соответственно. Распределение расхода  $q_n^{in}$  по узловым значениям  $q_n$ , исходя из предположения об однородности потока.
6. Задание начальных условий на  $n=1$  слое по времени.
7. Решение уравнений (28) на  $n+1$  шаге по времени с использованием метода Ньютона-Рафсона. Когда на каждой  $m$  итерации по нелинейности решается система линейных уравнений для поиска поправки решения  $\delta\phi_\alpha^{n+1,m+1}$

$$J_{\alpha\beta}^{n+1,m} \delta\phi_\beta^{n+1,m+1} = -R_\alpha^{n+1,m}, \quad (31)$$

и его обновления

$$\phi_\beta^{n+1,m+1} = \phi_\beta^{n+1,m} + \delta\phi_\beta^{n+1,m+1} \quad (32)$$

где  $J_{\alpha\beta}^{n+1,m} = \frac{\partial R_\alpha^{n+1,m}}{\partial \phi_\beta^{n+1,m}}$  – матрица Якоби, определенная по невязке решения

$$R_\alpha^{n+1,m} = \overline{K}_{\alpha\beta}^{n+1,m} \phi_\beta^{n+1,m} + \Delta t \theta (\overline{BK}_{\alpha\beta} \overline{BC})^{n+1,m} \hat{\phi}_\beta^{n+1,m} - \overline{F}_\alpha^{n,m},$$

$$\overline{K}_{\alpha\beta} = \left( \overline{M}_{\alpha\beta} + \Delta t \theta (\overline{K}_{\alpha\beta} + \overline{BK}_{\alpha\beta} \overline{CBC}) \right)^{n+1},$$

$$\overline{F}_\alpha^n = \left( \overline{M}_{\alpha\beta} - \Delta t (1-\theta) (\overline{K}_{\alpha\beta} + \overline{BK}_{\alpha\beta} \overline{CBC}) \right) \phi_\beta^n - \Delta t (1-\theta) (\overline{BK}_{\alpha\beta} \overline{BC}) \hat{\phi}_\beta^n.$$

8. Если контроль нормы ошибки  $\varepsilon_{rr}^m = \sqrt{\frac{\sum_i (\delta\phi_i^{n+1,m+1})^2}{\sum_i (\phi_i^{n+1,m+1})^2}} < \varepsilon$  решения меньше заданной,

выполняем переход к следующему шагу по времени.

9. Адаптация вычислительного шага по времени  $\Delta t$ .
10. Изменение текущего расчетного времени  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ .
11. Изменение граничных условий по  $q_n$  и  $\eta$ .
12. Расчет повторяется с п. 7 вплоть до его завершения по достижению условия  $t^{n+1} > t_{end}$ .

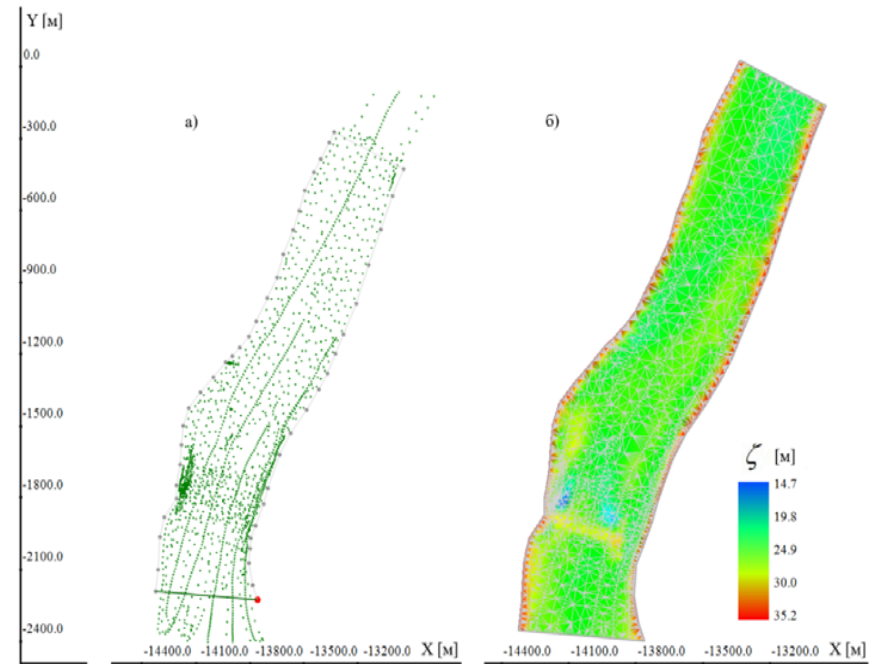


Рис. 3. Участок протока Пемзенская в окрестности переливной запруды, оцифрованный в информационной системе «Амур».  
Fig. 3. A section of the Pemzenskaya channel near the overflow dam, digitized in the Amur information system.

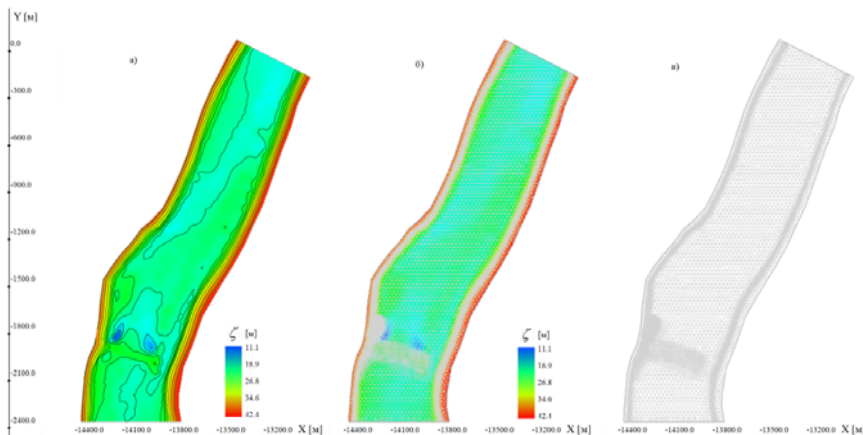


Рис. 4. Цифровой донный рельеф протоки Пемзенская и пример адаптивной расчетной сетки.  
Fig. 4. Digitized bottom relief of the Pemzenskaya channel and an example of an adaptive calculated grid.

## 7. Валидация математической модели

Для валидации модели (1)-(15) и определения коэффициентов гидравлического сопротивления русла был решен ряд задач.

Задачи решались в расчетной области, представленной на рис. 1, при следующих параметрах:  $J=0.0001$ ,  $\rho_w=1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $n=9.8 \text{ м/с}^2$ ,  $0.05 \leq k_s \leq 0.2$ ,  $0.07 \leq v_{0r} \leq 0.21$ ,  $C_D=0$ . Для исследуемой области (рис. 1) выполнено численное исследование движения потока через переливную запруду для расходов воды из диапазона  $q_{\min}^{\text{in}} \leq q_n^{\text{in}} \leq q_{\max}^{\text{in}}$  (рис. 5), проходящих через русло протоки.

На основе гидрографа за 2024 год, представленный на рис. 6, выполнялись расчеты для расходов  $q_n^{\text{in}} = 1500, 5301, 9102 \text{ м}^3/\text{с}$ , которые соответствуют течению при относительно малом расходе ниже бровок русла, течение при относительно среднем расходе и течение при высоком расходе с затоплением поймы. Особенностью движения речного потока в районе переливной запруды является наличие рециркуляционной зоны в нижнем бьефе запруды вдоль левого берега протоки.

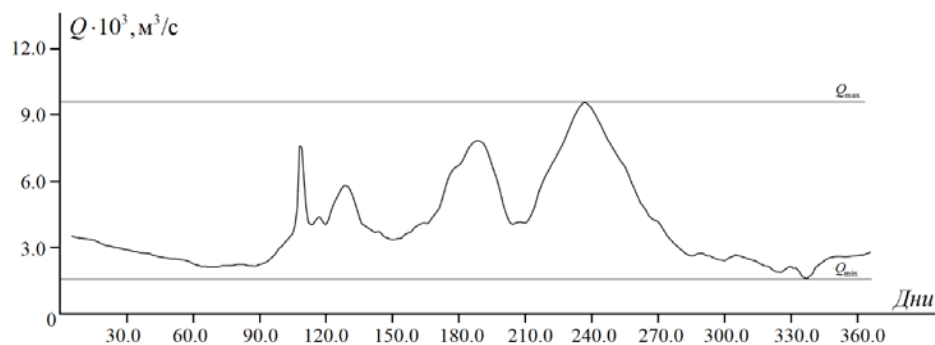


Рис. 5. Гидрограф протоки Пемзенская за 2024 год.  
Fig. 5. Hydrograph of the Pemzenskaya channel for 2024.

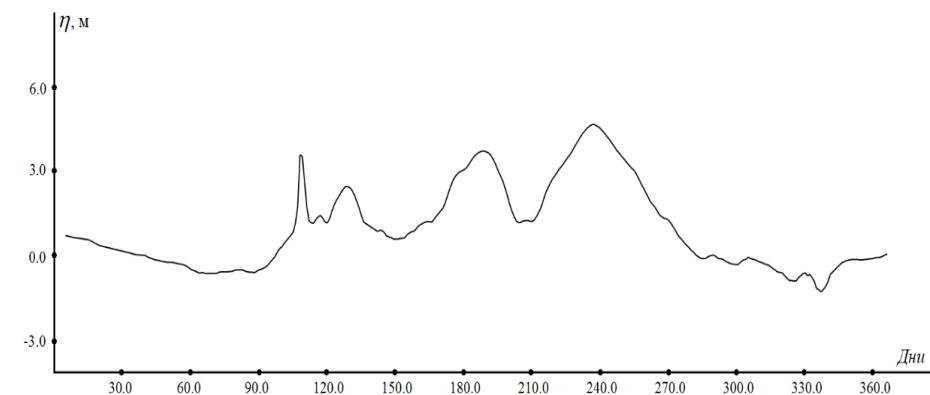


Рис. 6. График уровней воды протоки Пемзенская за 2024 год.  
Fig. 6. Water level chart for the Pemzenskaya channel for 2024.

Расчеты проводились на трех расчетных сетках с различным размером конечных элементов. В прибрежных областях, области запруды и рециркуляционной зоне потока вдоль левого берега в нижнем бьефе запруды проводилось дополнительное адаптивное сгущение расчетной сетки. Для самой мелкой сетки (рис. 4) средний диаметр конечного элемента составлял 20 м, в адаптированной зоне средний диаметр конечного элемента составлял 3 м. На входной границе  $\Gamma_{in}$  задавался расход воды  $q_n^{\text{in}}$ , соответствующий эксперименту, на выходной  $\Gamma_{out}$  – величина  $H^{\text{out}}$ . Расчет проводился до тех пор, пока на выходной границе расчетной области не устанавливался постоянный расход  $q_n^{\text{in}}$ , равный расходу на входной границе  $\Gamma_{in}$ . Результаты расчетов на мелкой сетке приведены на рис. 7-10.

Анализ расчетов моделирования показывает, что с изменением расходов воды  $q_n^{\text{in}}$  изменялось скоростное поле потока. Максимальные скорости течения над переливной запрудой изменялись в диапазоне от 1.6 м/с до 2.3 м/с. В рециркуляционной зоне средние скорости течения составляют 50% от максимальных скоростей протоки. Для расхода  $q_n^{\text{in}} = 5301 \text{ м}^3/\text{с}$  рециркуляционная зона имеет более укороченную форму длиной 210 м (рис. 10а, подобласть I) по сравнению с формой рециркуляционной зоны для  $q_n^{\text{in}} = 1500 \text{ м}^3/\text{с}$  и  $q_n^{\text{in}} = 9102 \text{ м}^3/\text{с}$ , и близка с замеренной областью для поверхностных скоростей (рис. 10б, подобласть I). Максимальный перепад уровня свободной поверхности изменяется от 0.05 м/км до 0.115 м/км.

Калибровка модели была проведена с использованием разницы уровней водной поверхности  $\max(\eta_{in}) - \max(\eta_{out})$ , между начальным и конечным створами наблюдения (рис. 7).

Поскольку у авторов отсутствовала информация о реальных расходах протоки Пемзенской для выбранных уровней гидропоста г. Хабаровска, то калибровка модели выполнялась приближенно. Полагалось, что расход воды через протоку составляет 38% от полного расхода реки Амур в окрестности г. Хабаровска. Предполагалось, что для каждого выбранного расхода  $q_n^{\text{in}}$  перепад уровней водной поверхности на расчетном участке должен быть неизменен. Наилучшее согласование между расчетными и фактическими данными при всех значениях расхода  $q_n^{\text{in}}$  было достигнуто при неизменном коэффициенте шероховатости, равном  $k_s=0.1$ .

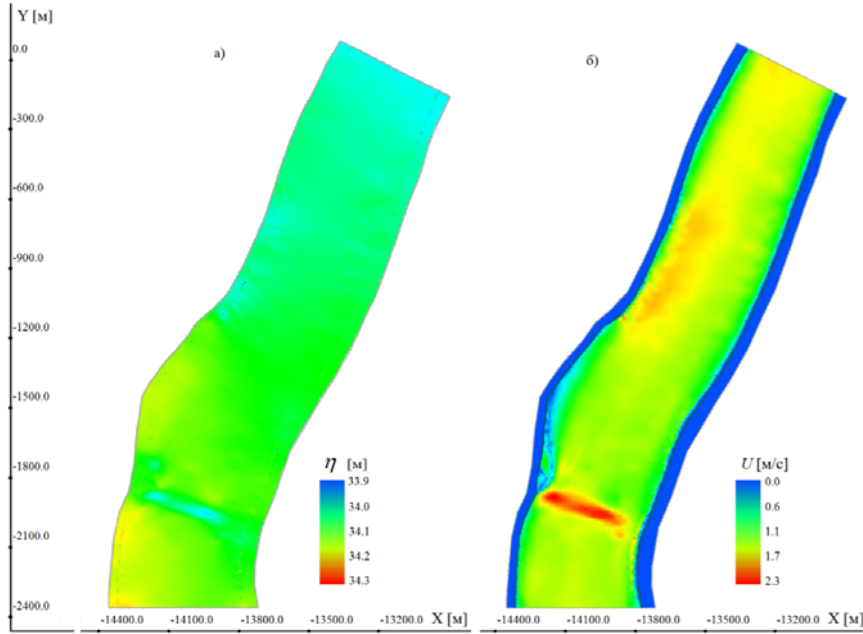


Рис. 7. Рассчитанные уровни свободной поверхности и скорости течения для расхода воды 9102 м³/с.  
Fig. 7. Calculated free surface levels and flow velocities for water flow rate 9102 m³/s.

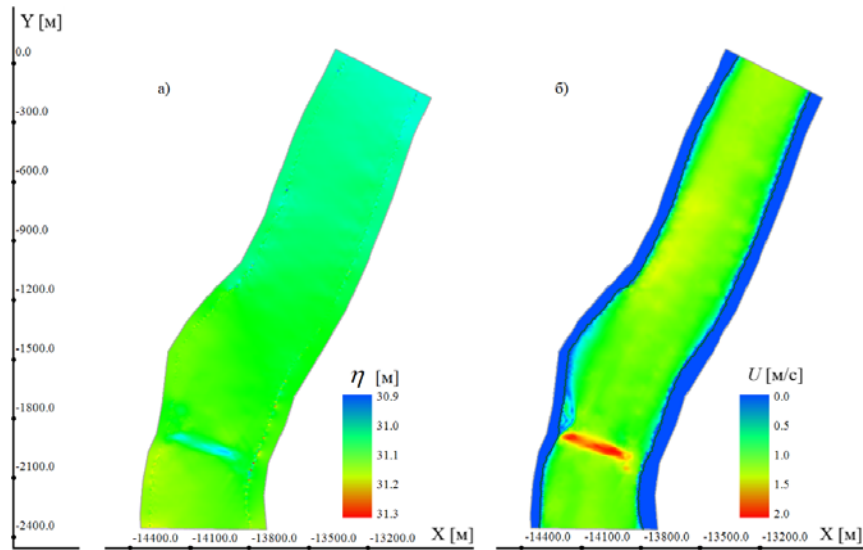


Рис. 8. Рассчитанные уровни свободной поверхности и скорости течения для расхода воды 5301 м³/с.  
Fig. 8. Calculated free surface levels and flow velocities for water flow rate 5301 m³/s.

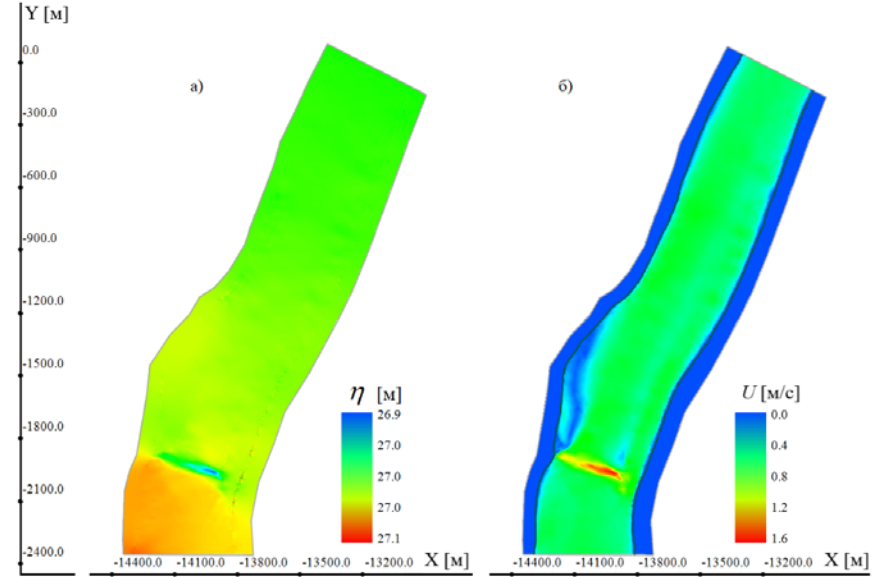


Рис. 9. Рассчитанные уровни свободной поверхности и скорости течения для расхода воды 1500 м³/с.  
Fig. 9. Calculated free surface levels and flow velocities for water flow rate 1500 m³/s.

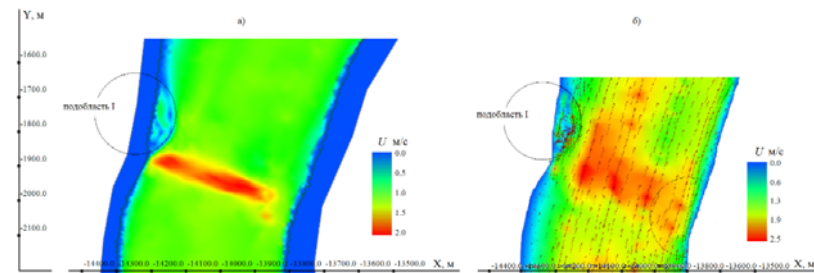


Рис. 10. Расчетное поле средних скоростей потока для  $q_n^{in} = 5301 \text{ м}^3/\text{с}$  (а) и поле поверхностных скоростей (б).  
Fig. 10. Calculated field of average flow velocities for  $q_n^{in} = 5301 \text{ м}^3/\text{с}$  (a) and the field of surface velocities (b).

## 8. Заключение

1. В работе предложена региональная математическая модель, описывающая процесс течения речного потока через переливную запруду протоки Пемзенская реки Амур в окрестности города Хабаровска.
2. На основе метода конечных элементов в формулировке Петрова-Галеркина получен дискретный аналог уравнений математической модели и предложен алгоритм решения задачи.
3. Решение задачи было сопряжено с калибровкой перепада свободной поверхности, выбором подходящего коэффициента  $k_s$ .

## Список литературы / References

- [1]. Бортин Н.Н., Милаев В.М., Горчаков А.М. Влияние природных и антропогенных факторов на пропускную способность русла реки Амур у города Хабаровска при прохождении паводков. *Водное хозяйство России*, № 2, 2020, стр. 66-82. / Bortin N.N., Milaev V.M., Gorchakov A.M. The influence of natural and anthropogenic factors on the capacity of the Amur River channel near the city of Khabarovsk during floods. *Water management in Russia*, no 2, 2020, pp. 66-82 (in Russian).
- [2]. Маккавеев Н.И. Русло реки и эрозия в ее бассейне. М.: Изд-во АН СССР, 1955, 347 с. / Makkaveev N.I. River bed and erosion in its basin. M.: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1955, 347 p. (in Russian).
- [3]. Потапов И.И. Моделирование гидродинамических и русловых процессов равнинных рек // Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. Владивосток: ИАПУ, 2006, 212 с. / Potapov I.I. Modeling of hydrodynamic and channel processes of lowland rivers // Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences. Vladivostok: IAPU, 2006, 212 p. (in Russian).
- [4]. Потапов И.И., Потапов Д.И. Анализ русловых процессов участка р. Амур в окрестности Хабаровска за 2005-2007 гг. *Информатика и системы управления*, № 4(58), 2018, стр. 150-156. DOI: 10.22250/isu.2018.58.150-156. / Potapov I.I., Potapov D.I. Analysis of channel processes in the Amur River section near Khabarovsk for 2005-2007. *Computer Science and Control Systems*, No. 4(58), 2018, pp. 150-156 (in Russian). DOI: 10.22250/isu.2018.58.150-156.
- [5]. Чалов Р.С., Куракова А.А. Голубцов Г.Б., Завадский А.С. Трансформация речных русел в процессе их саморазвития и влияния естественных и антропогенных изменений факторов русловых процессов. *Известия русского географического общества*, т. 155, № 2, 2023, стр. 88-108. / DOI: 10.31857/S0869607123020039 / Chalov R.S., Kurakova A.A., Golubtsov G.B., Zavadskii A.S. Transformation of river channels during their self-development and the influence of natural and anthropogenic changes in channel process factors. *Bulletin of the Russian Geographical Society*, vol. 155, no. 2, 2023, pp. 88-108 (in Russian).
- [6]. Беликов В.В., Алексюк А.И., Борисова Н.М., Васильева Е.С., Глотко А.В. Опыт численного гидродинамического моделирования протяженных участков рек. *Водные ресурсы*, № 4(5), 2023, стр. 367-384. / Belikov V.V., Alekseyuk A.I., Borisova N.M., Vasilyeva E.S., Glotko A.V. Experience of numerical hydrodynamic modeling of long river sections. *Water Resources*, no. 4(5), 2023, pp. 367-384 (in Russian).
- [7]. Belikov V.V., Krylenko I.N., Alabyan A.M., Sazonov A.A., Glotko A.V. Two-dimensional hydrodynamic flood modelling for populated valley areas of Russian rivers. *Changes in Flood Risk and Perception in Catchments and Cities: Proc. IAHS*. vol. 370, 2015, pp. 69-74.
- [8]. Канторович В.К., Кучмент Л.С. Применение метода конечных элементов к расчетам неустановившегося движения воды по уравнениям Сен-Венана. *Водные ресурсы*, № 6, 1981, стр. 44-53. / Kantorovich V.K., Kuchment L.S. Application of the finite element method to calculations of unsteady water flow using the Saint-Venant equations. *Water Resources*, no. 6, 1981, pp. 44-53 (in Russian).
- [9]. Мотовилов Ю.Г., Гельфан А.Н. Модели формирования стока в задача гидрологии речных бассейнов. *Институт водных проблем РАН*. М.: 2018, 300 с. / Motovilov Yu.G., Gelfan A.N. Runoff formation models in river basin hydrology problems. *Water Problems Institute, Russian Academy of Sciences*. Moscow, 2018, 300 p. (in Russian).
- [10]. Defina A. Two-dimensional shallow flow equation for partially dry areas. *Water resources research*, vol. 36, no. 11, 2000, pp. 3251-3264.
- [11]. Ghanem, A.H.M. Two-dimensional finite element modeling of flow in aquatic habitats // A thesis submitted to the faculty of graduate studies and research in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of philosophy. University of Alberta, 1995, 122 p. DOI: 10.7939/R3VH5CS4G.
- [12]. Потапов И.И. Исходный код информационной системы «Амур», 2024. Доступно по адресу: <https://github.com/PotapovII/Amur>, обращение 01.07.2025. / Potapov I.I. Source code of the Amur information system. 2024 (in Russian). Available at: <https://github.com/PotapovII/Amur>, accessed 01.07.2025.
- [13]. Van Rijn L.C. Principles of fluid flow and surface waves in rivers, estuaries, seas, and oceans. *Aqua publications*. Amsterdam: Aqua, 1990, 335 p.
- [14]. Weiyan T. Shallow water hydrodynamics. Elsevier oceanography series, 55. Elsevier, Amsterdam, 1992.

- [15]. Шабров Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. / Shabrov N.N. Finite element method in calculations of heat engine parts. L.: Mechanical Engineering, 1983 (in Russian).
- [16]. Булгаков В. К., Потапов И. И. Сравнительный анализ противопоточных конечно-элементных схем высокого порядка для задачи Навье–Стокса на основе модифицированного SUPG-метода. *Дальневосточный математический журнал*, т. 4, № 1, 2003, стр. 5-17. <https://www.mathnet.ru/rus/dvmg141> / Bulgakov V.K., Potapov I.I. Comparative analysis of high-order upwind finite element schemes for the Navier–Stokes problem based on the modified SUPG method. *Far Eastern Mathematical Journal*, vol. 4, no. 1, 2003, pp. 5-17 (in Russian).

## Информация об авторах / Information about authors

Игорь Иванович ПОТАПОВ – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией вычислительной механики Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской Академии наук. Область научных интересов: численные методы, русловые и гидродинамические процессы в равнинных реках.

Igor Ivanovich POTAPOV – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Computational Mechanics of the Computer center of Far East Branch of the Russian Academy of Sciences. The research interests: numerical methods, channel and hydrodynamics processes in lowland rivers.

Юлия Георгиевна СИЛАКОВА – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской Академии наук. Область научных интересов: математическое моделирование русловых процессов для рек с песчаным основанием.

Yuliya Georgievna SILAKOVA – Cand. Sci. (Phys.-Math.), researcher of the Computer center of Far East Branch of the Russian Academy of Sciences. Research interests: mathematical modeling of channel processes for rivers with sandy bases.