

DOI: 10.15514/ISPRAS-2026-38(6)-4



Объединение пространств состояний динамической системы через полилинейное отображение

Д.М. Тихонов, ORCID: 0000-0003-0337-4828 <tihonov.denis.m@gmail.com>

В.В. Стрижов, ORCID: 0000-0002-2194-8859 <strijov@gmail.com>

ООО Форексис, Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, д.42.

Аннотация. Решается задача восстановления пространства состояний динамической системы на основе временных рядов. В одномерном случае фазовое пространство восстанавливается с помощью метода задержек. В случае нескольких временных рядов полученные пространства состояний объединяются либо прямым объединением, либо объединением получаемых подпространств. В данной статье предлагается подход объединению пространств состояний через полилинейное отображение. Объединяющий тензор раскладывается каноническим разложением для снижения числа настраиваемых параметров модели. Такой подход позволяет сохранить точность модели при ее существенном упрощении. Результаты тестируются на данных акселерометра мобильного устройства для нескольких человек с двумя типами активности.

Ключевые слова: многомерные временные ряды; динамические системы; метод задержек, тензорное отображение; нейронные сети.

Для цитирования: Тихонов Д.М., Стрижов В.В. Объединение пространств состояний динамической системы через полилинейное отображение. Труды ИСП РАН, том 38, вып. 6, часть 1, 2026 г., стр. 63-72. DOI: 10.15514/ISPRAS-2026-38(6)-4.

Unifying state spaces of a dynamical system via multilinear mapping

D.M. Tikhonov, ORCID: 0000-0003-0337-4828 <tihonov.denis.m@gmail.com>

V.V. Strijov, ORCID: 0000-0002-2194-8859 <strijov@gmail.com>

Forecsys, 42, Vavilova st., Moscow, 119333, Russia.

Abstract. The problem of the state space reconstruction is being considered. In the one-dimensional case, the phase space is reconstructed using the method of delays. In multivariate case the resulting state spaces are combined either by direct union or by union the obtained subspaces. This article proposes an approach for combining state spaces via a multilinear map. The mapping tensor is decomposed using a canonical decomposition to reduce the number of model parameters. This approach preserves model accuracy while significantly simplifying it. The results are tested on mobile device accelerometer data from several individuals engaged in two types of activity.

Keywords: multivariate time series; dynamical systems; delay embedding; tensor map; neural network models.

For citation: Tikhonov D.M., Strijov V.V. Unifying state spaces of a dynamical system via multilinear mapping. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, 2026, vol. 38, issue 6, part 1, pp. 63-72 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2026-38(6)-4.

1. Введение

Построение прогностических моделей на многомерных временных рядах, получаемых в ходе экспериментов, является фундаментальной задачей машинного обучения. Во многих прикладных областях существует необходимость восстановить неизвестные закономерности исследуемых систем по ограниченному набору измерений. Особую сложность представляют системы с высокой размерностью или хаотическим поведением, где доступны лишь скалярные наблюдения.

Теорема Такенса [1] и более ранние теоремы Уитни [2] предлагают решение задачи восстановления зависимостей по скалярным наблюдениям. Было доказано, что при определенных условиях *пространство состояний* неизвестной системы восстанавливается из одномерного временного ряда с помощью метода временных задержек. Пространство состояний – это многомерное пространство, каждая точка которого описывает полное состояние системы в конкретный момент времени.

На практике системы наблюдаются одновременно по нескольким каналам, например, показания набора датчиков, акселерометры и гироскопы. В таком случае доступны многомерные временные ряды, связанные во времени и имеющие множественные зависимости. Требуется объединить информацию из разных наблюдаемых переменных для построения единого пространства состояний.

Существующие подходы делятся на два класса: прямое объединение векторов задержек каждой наблюдаемой и объединение отдельных подпространств, полученных для каждого ряда по отдельности. Первый подход должен решать проблему избыточной размерности и корреляции, второй требует дополнительных предположений о связи подпространств.

В данной работе предлагается новый подход, основанный на полилинейном отображении, которое объединяет фазовые пространства, восстановленные из разных временных рядов, в единое пространство состояний. Для снижения вычислительной сложности и числа настраиваемых параметров используется каноническое разложение тензора, задающего это отображение. Такой подход сохраняет точность модели при значительном снижении числа параметров. Вычислительный эксперимент проведен на реальных данных акселерометра мобильного устройства для нескольких испытуемых и двух типов активности. Статья организована следующим образом. В втором разделе приводится обзор существующих методов восстановления фазового пространства. Третий раздел содержит формальное постановку задачи восстановления пространства состояний. В четверти описывается предлагаемое полилинейное отображение, его тензорное представление и каноническое разложение. В пятом разделе представлены результаты численных экспериментов и их обсуждение. Заключение подводит итоги и намечает направления дальнейших исследований.

2. Обзор существующих методов восстановления фазового пространства и объединения временных рядов

Восстановление фазового пространства по временным рядам основана на фундаментальных работах [1,2]. Классические методы включают метод производных [3], метод временных задержек [4,5] и *вложение главных компонент*, основанных на методе главных компонент [6]. Эти подходы используются для анализа нелинейной динамики, расчёта инвариантных показателей, например, показателей Ляпунова и корреляционный размерностей, и анализа бифуркаций [7]. Обзор практической реализации таких методов представлен в работах [7-8]. Ключевой проблемой при применении метода задержек является выбор двух параметров: временной задержки и размерности вложения. Для их определения предложены критерии, такие как взаимная информация [4] для выбора лага и метод ложных ближайших соседей [9] или его модификация [10] для определения размерности. При наличии периодичности или шума эти критерии требуют дополнительной настройки.

В случае многомерных наблюдений возникает задача объединения информации из нескольких рядов. В работе [11] рассматривается два основных подхода: прямое объединение векторов задержек из каждого ряда и объединение уже восстановленных подпространств. Первый подход прост в реализации, но ведёт к росту размерности и избыточности; второй – требует методов согласования подпространств, что часто реализуется в нейросетевых архитектурах, где каждый временной ряд обрабатывается отдельной подсетью, а затем полученные представления объединяются в более “поздних” слоях. Современные исследования [12-13] сравнивают стратегии объединения для качества последующего прогнозирования.

Отдельное направление составляют методы, использующие тензорные представления для моделирования многомерных временных рядов. Тензор – это многомерный массив, обобщающий понятие матрицы. Тензорные разложения, например, каноническое разложение или разложение тензорного произведения, компактно представляют высокоразмерные данные. Классическая работа [14] предлагает обзор тензорных разложений и их приложений. В недавних исследованиях тензорные методы активно применяются в анализе временных рядов: например, для авторегрессионного прогнозирования на основе тензорного разложения [15-17] и для построения полилинейных систем [18]. Эти подходы показывают, что тензорное разложение значительно уменьшает число параметров модели при малых потерях точности в сравнении с “полными” моделями, что актуально для задач с ограниченными вычислительными ресурсами.

Предлагаемый в данной работе метод использует результаты из классических и тензорных подходов: объединения фазовых подпространств и тензорного разложения полилинейного отображения. В отличие от упомянутых методов, предлагаемый подход строит единое полилинейное отображение из нескольких восстановленных подпространств в общее пространство состояний. Само отображение параметризуется тензором, разложенный каноническим разложением. Это снижает число настраиваемых параметров модели относительно числа временных рядов с экспоненциального до линейного и сохраняет связь между истинной неизвестной и восстановленной системами. Вычислительный эксперимент с прямым объединением и объединением подпространств показывает эффективность предлагаемого подхода.

3. Постановка задачи снижения размерности фазового пространства

Динамическая система F – это функция эволюции, определённая в пространстве $V \subseteq \mathbb{R}^{d_s}$, называемом пространством состояний. Дискретный случай определяется как d_s -мерное отображение $F: V \rightarrow V$, такое что

$$\mathbf{v}_{t+1} = F(\mathbf{v}_t),$$

где $\mathbf{v}_t \in \mathbb{R}^{d_s}$ – вектор состояния системы, d_s – размерность динамической системы. Если доступны только дискретные моменты времени, то непрерывная динамическая система представима в виде дискретной $\mathbf{v}_t = \mathbf{v}(k\Delta t)$ с шагом Δt и $k \in \mathbb{N}^+$.

Истинные значения $\mathbf{v}_t$ в большинстве случаев неизвестны, но связаны с реальным временным рядом $\{\mathbf{v}_{\text{obs } t}\}_{t=1}^N$ через функцию наблюдения $h: V \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{v}_{\text{obs } t} = [x_{1,t}, \dots, x_{m,t}]^T = h(\mathbf{v}_t),$$

где N – длина временного ряда, $x_{i,t}$, $i = 1, \dots, m$ – скалярные значения временного ряда. Число наблюдаемых временных рядов m равно единице для одномерного случая и $m \geq 2$ для многомерного.

При предположении о непрерывности и слабом уровне шума во временных рядах теорема Такенса гарантирует, что метод задержек определяет $(2d_s+1)$ -мерное фазовое пространство,

которое в общем случае диффеоморфно полному пространству состояний. Два параметра вложения: τ – задержка, n – размерность вложения.

Метод временных задержек $\Phi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ отображает скалярный временной ряд $\{x_t\}_{t=1}^N$ в фазовое пространство, формируя вектор-столбец вида

$$\mathbf{x}_t = [x_{t-(n-1)\tau}, \dots, x_{t-\tau}, x_t]^T.$$

Матрица $\mathbf{X}$ из уравнения ниже называется траекторной матрицей. Результирующая траекторная матрица $\mathbf{X}$ временного ряда $\mathbf{x}$ определяется как

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_2 & \dots & x_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k & \dots & x_N \end{bmatrix}^T = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k], k = N - n + 1,$$

где n – ширина окна, N – длина временного ряда, τ равно единице. Исходное фазовое пространство, полученное с помощью метода задержек, имеет высокую размерность. Необходимо уменьшить размерность пространства.

Для снижения размерности рассматривается модельный подход – вложение глобальных главных компонент. Он используется для преобразования начального набора переменных в их подпространство:

$$\mathbf{S} = \mathbf{W}\mathbf{X} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_k], \mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^p,$$

где $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ – матрица преобразования. Число выбранных компонент равно p и соответствует наибольшему собственным значениям. Схема восстановления пространств показана на рис. 1.

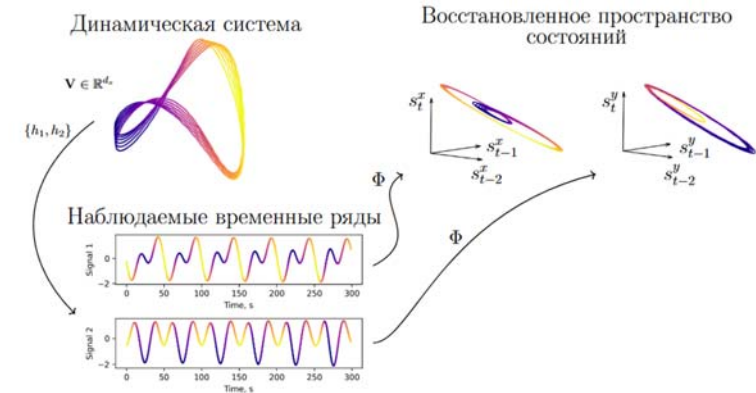


Рис. 1. Схема восстановления пространства состояний по наблюдаемым временным рядам, где M – динамическая система, h_1, h_2 – функции наблюдения, Φ – функции построения фазового пространства. Fig. 1. Schematic diagram of state space reconstruction from observed time series, where M is the dynamical system and h_1, h_2 are observation functions, Φ are the state-space reconstruction functions.

Для многомерного случая исходное фазовое пространство представимо как прямое объединение векторов задержек. Без ограничения общности для дальнейших выкладок предположим, что $m = 3$, а временные ряды обозначаются как $\{x_t\}_{t=1}^N$, $\{y_t\}_{t=1}^N$ и $\{z_t\}_{t=1}^N$. Тогда исходное пространство состояний представимо в виде

$$\mathbf{x}_{\text{yzt}} = [\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t]^T = [x_{t-(n-1)\tau}, \dots, x_{t-\tau}, x_t, y_{t-(n-1)\tau}, \dots, y_{t-\tau}, y_t, z_{t-(n-1)\tau}, \dots, z_{t-\tau}, z_t]^T.$$

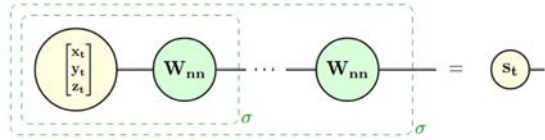


Рис. 2. Схема полносвязной нейронной сети с объединением векторов задержек временных рядов, где σ – функция активации.

Fig. 2. Schematic diagram of a fully connected neural network with merging of time delay vectors of time series, where σ is the activation function.

При наличии нелинейности в динамике системы используются нейросетевые методы. Классические подходы включают в себя объединение исходных векторов задержек $[x_t, y_t, z_t]^T$. Альтернативно, объединяются уже полученные низкоразмерные представления $[h_{x,t}, h_{y,t}, h_{z,t}]^T$ на основе каждого временного ряда. Ключевое отличие – возможность использовать индивидуальные архитектуры моделей во втором случае. Пример классической архитектуры показан на рис. 2, пример с получением и объединением индивидуальных подпространств – на рис. 3.

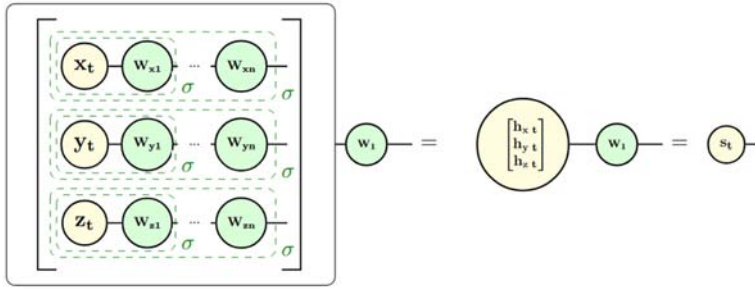


Рис. 3. Схема полносвязной нейронной сети с объединением преобразованных фазовых пространств каждого временного ряда, где σ – функция активации.

Fig. 3. Schematic diagram of a fully connected neural network with merging of the transformed phase spaces of each time series, where σ is the activation function.

Подобная задача формально представима как минимизация функции ошибки восстановления исходных временных рядов. Например, минимизируется среднеквадратичная ошибка между восстановленным из фазового подпространства и исходным временным рядом:

$$\hat{\theta}, \hat{\phi} = \arg \min_{\theta, \phi} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{L}(\mathbf{X}, g_{\phi}(f_{\theta}(\mathbf{X}))),$$

где θ – параметры сети, снижающей размерность $f_{\theta}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$; ϕ – параметры нейронной сети, восстанавливающей исходный временной ряд $g_{\phi}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\mathcal{L}$ – функция потерь (например, MSE).

3.1 Полилинейное отображение для объединения промежуточных пространств

Чтобы определить полилинейное отображение для реконструкции динамических систем, необходимо ввести тензорное произведение вектора по выбранной моде. Произведение тензора $A \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_n}$ и вектора $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{I_n}$ по n -моду даёт $C \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_{n-1} \times I_{n+1} \times \dots \times I_N}$ и определяется как:

$$C = A \times_n^1 \mathbf{v} = A \times_n \mathbf{v}, c_{i_1, \dots, i_{n-1}, i_{n+1}, \dots, i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} a_{i_1, \dots, i_n, \dots, i_N} v_{i_n}.$$

Для объединения пространства состояний из разных временных рядов используется полилинейное преобразование вида

$$\mathbf{s}_t = W \times_2 \mathbf{h}_{x,t} \times_3 \mathbf{h}_{y,t} \times_4 \mathbf{h}_{z,t},$$

где $\mathbf{h}_{x,t}, \mathbf{h}_{y,t}, \mathbf{h}_{z,t} \in \mathbb{R}^p$ – промежуточные нейросетевые представления, $\mathbf{s}_t \in \mathbb{R}^p$ – векторное представление в фазовом пространстве с $p \ll n$. Многомерный случай представлен в уравнении выше, где осуществляется полилинейное объединение эмбедингов разных временных рядов.

Предложенная полилинейная модель не включает в себя прямую линейную составляющую и множественные комбинации. Для их учёта к каждому вектору эмбединга добавляется константа, что позволяет явно учесть предложенные компоненты:

$$\mathbf{s}_t = W \times_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{x,t} \end{bmatrix} \times_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{y,t} \end{bmatrix} \times_4 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{z,t} \end{bmatrix},$$

где $W \in \mathbb{R}^{p \times (n+1) \times (n+1) \times (n+1)}$. На рис. 4 показано графическое представление предлагаемого метода в графической нотации Пенроуза.

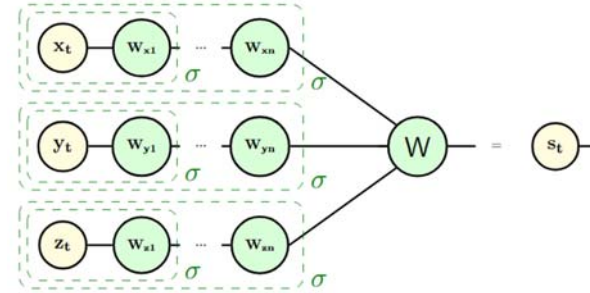


Рис. 4. Схема нейронной сети с полилинейным объединением фазовых пространств каждого временного ряда.

Fig. 4. Scheme of a neural network with multilinear fusion of phase spaces from each time series.

Тензор W выбирает не только основные компоненты, как в случае PCA для одномерных временных рядов, но и осуществляет полилинейное объединение нейросетевых представлений нескольких временных рядов в соответствии с их нелинейными зависимостями.

3.2 Каноническое разложение полилинейного отображения

Основной мотивацией для использования тензорного подхода является оптимизация W каноническим разложением. Это разложение раскладывает тензор на R внешних произведений:

$$W = \sum_{r=1}^R \mathbf{w}_{r,1} \otimes \mathbf{w}_{r,2} \otimes \mathbf{w}_{r,3} \otimes \mathbf{w}_{r,4},$$

где R – минимальный ранг тензора, $\mathbf{w}_{r,1} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{w}_{r,2}, \mathbf{w}_{r,3}, \mathbf{w}_{r,4} \in \mathbb{R}^{n+1}$ – векторы-факторы, $1 \leq r \leq R$.

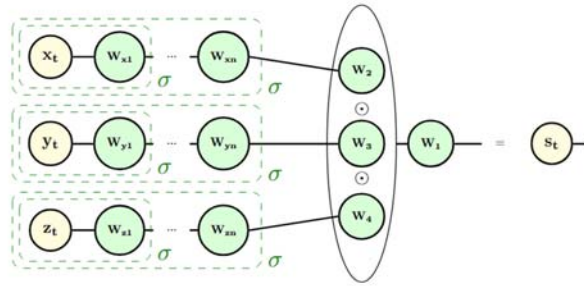


Рис. 5. Схема нейронной сети с полилинейным объединением фазовых пространств каждого временного ряда с каноническим разложением.

Fig. 5. Scheme of a neural network with multilinear fusion of phase spaces of each time series using canonical decomposition.

В общем случае вычисление ранга R является NP-трудной задачей. Поэтому для оптимизации R подбирается экспертно для каждой задачи, что приводит к аппроксимации тензора $\hat{A} \approx \sum_{r=1}^R \mathbf{w}_{r,1} \otimes \mathbf{w}_{r,2} \otimes \mathbf{w}_{r,3} \otimes \mathbf{w}_{r,4}$. Это разложение дополнительно преобразует общую модель к следующему виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_t &= \mathbf{W} \times_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{\square t} \end{bmatrix} \times_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{y t} \end{bmatrix} \times_4 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{z t} \end{bmatrix} \\ &\approx \left(\sum_{r=1}^R \mathbf{w}_{r,1} \otimes \mathbf{w}_{r,2} \otimes \mathbf{w}_{r,3} \otimes \mathbf{w}_{r,4} \right) \times_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{\square t} \end{bmatrix} \times_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{y t} \end{bmatrix} \times_4 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{z t} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{r=1}^R \mathbf{w}_{r,1} (\mathbf{w}_{r,2}^T \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{\square t} \end{bmatrix}) (\mathbf{w}_{r,3}^T \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{y t} \end{bmatrix}) (\mathbf{w}_{r,4}^T \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{z t} \end{bmatrix}) \\ &= \mathbf{W}_1 (\mathbf{W}_2^T \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{\square t} \end{bmatrix} \odot \mathbf{W}_3^T \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{y t} \end{bmatrix} \odot \mathbf{W}_4^T \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{h}_{z t} \end{bmatrix}), \end{aligned}$$

где $\odot$ – поэлементное произведение Адамара, $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_R$ – матрицы факторов. Изменение модели с таким разложением показано на рис. 5.

4. Вычислительный эксперимент

С целью анализа влияния трёх подходов на качество восстановления динамической системы и оценки точности прогноза исходных временных рядов был проведён вычислительный эксперимент. Для сравнительной оценки точности реконструкции пространства состояний и прогнозирования временного ряда использовались среднеквадратичная ошибка и коэффициент детерминации (R^2). Сравнивалась точность прогноза между нейросетевыми подходами: прямым объединением исходных пространств, объединением получаемых подпространств и предложенным полилинейным отображением. Более сложные модели в сравнении не использовались, поскольку исследуется случай маловесных моделей. При достаточных данных SOTA модели показывают лучшие результаты. Сравнение показано в табл. 1.

Эксперимент выполнен на данных акселерометра, записанных с мобильного устройства [17]. Набор данных включает временные ряды акселерометра и гироскопа с частотой дискретизации 50 Гц. Запись данных проводилась на 24 участниках различного пола, возраста, веса и роста, каждый из которых выполнял шесть типов физической активности. Для вычислительного эксперимента были выбраны три вида активности: ходьба, спуск и

подъём по лестнице. Временные ряды акселерометра записывались мобильным устройством, расположенным в кармане участника во время выполнения соответствующего типа физической активности.

Табл. 1. Сравнение базовых методов прогнозирования временных рядов.

Table 1. Comparison of basic time series forecasting methods.

Тип модели	Малый объём данных (длина $<10^4$)	Средний объём данных (длина $\sim 10^5$)	Большой объём данных (длина $>10^6$)
Линейные модели	Эффективны (ARIMA, авторегрессия)	Недостаточно нелинейности	Неспособны моделировать нелинейные зависимости
Полилинейные модели	Требуют регуляризации	Оптимальны (тензорные разложения снижают число параметров)	Уступают нейросетям по гибкости
Нейросетевые модели	Сильное переобучение	Требуют регуляризации	Высокая эффективность



Рис. 6. Схема вычислительного эксперимента с оценкой качества на восстановленном временном ряду.

Fig. 6. Schematic diagram of the computational experiment with quality assessment on the reconstructed time series.

В исследовании сравнивается точность прогнозирования трёх подходов при одинаковом объёме данных, сопоставимом количестве настраиваемых параметров моделей и фиксированной длине окна $n = 10$ для всех временных рядов. Были использованы данные участников с непрерывным движением длительностью не менее 10 минут. Из данных были выбраны сегменты временных рядов без смены типа активности в пределах одного окна.

Точность восстановления для различных размерностей фазовых пространств показана в табл. 2 и 3. Исходные пространства – это векторные представления, полученные методом временных задержек. Число параметров нейронных сетей подбиралось примерно равным 500-3000 и зависимо только от длины вектора задержек.

Табл. 2. Значения $rMSE$ и R^2 для восстановленного временного ряда, соответствующего ходьбе.

Table 2. RMSE and R^2 for the reconstructed walking time series.

Размерность	Вложение глобальных компонент, R^2	Вложение глобальных компонент, $rMSE$	Исходное R^2	Исходное $rMSE$	Скрытое R^2	Скрытое $rMSE$	Полилинейное R^2	Полилинейное $rMSE$
3	0,160	0,308	0,154	0,31	0,125	0,314	0,198	0,299
4	0,205	0,299	0,203	0,301	0,17	0,306	0,254	0,289
5	0,260	0,280	0,25	0,291	0,207	0,298	0,319	0,276
6	0,280	0,275	0,298	0,282	0,247	0,291	0,361	0,267
7	0,350	0,240	0,346	0,273	0,283	0,284	0,411	0,255

Табл. 3. Значения $gMSE$ и R^2 для восстановленного временного ряда, соответствующего спуску по лестнице.
Table 3. $RMSE$ and R^2 values for the reconstructed time series corresponding to stair descent.

Размерность	Вложение глобальных компонент, R^2	Вложение глобальных компонент, $gMSE$	Исходное R^2	Исходное $gMSE$	Скрытое R^2	Скрытое $gMSE$	Полилинейное R^2	Полилинейное $gMSE$
3	0,062	0,296	0,061	0,297	0,053	0,298	0,072	0,296
4	0,101	0,292	0,098	0,291	0,086	0,293	0,102	0,291
5	0,143	0,271	0,141	0,284	0,122	0,287	0,144	0,284
6	0,180	0,271	0,178	0,278	0,155	0,281	0,183	0,278
7	0,210	0,271	0,214	0,271	0,189	0,275	0,218	0,271

Точность прогнозирования напрямую зависит от размерности фазового подпространства. С увеличением размерности значения R^2 увеличиваются, а $gMSE$ уменьшаются для всех трёх подходов. Это справедливо как для задачи восстановления временного ряда, соответствующего ходьбе, так и для спуска по лестнице.

Эффективность предложенного метода заметно выражена для более сложного типа активности – ходьбы, где разница в показателях R^2 между полилинейным методом и альтернативными подходами является статистически значимой. Например, для размерности подпространства 7 значение R^2 для полилинейного подхода существенно превышает результаты метода объединения исходного пространства и метода объединения скрытого пространства. Для менее динамичной активности (спуск по лестнице) все методы показывают схожую, но менее точную динамику.

5. Заключение

В данной работе предложен новый подход к объединению пространств состояний динамических систем, восстановленных из многомерных временных рядов. Основной вклад работы заключается в разработке полилинейного метода, который использует единое отображение для одновременного снижения размерности и объединения нейросетевых представлений нескольких временных рядов. Для решения проблемы роста числа параметров полилинейной модели в работе применено каноническое тензорное разложение.

Предлагаемый метод достигает сопоставимые результаты при меньшем числе настраиваемых параметров по сравнению с классическими нейросетевыми подходами. Экспериментальная оценка метода проведена на реальных данных с акселерометра мобильного устройства. Полилинейный подход с тензорным разложением показывает сравнительные результаты в задачах прогнозирования временных рядов. В частности, в ряде случаев наблюдается устойчивое улучшение метрик точности – коэффициента детерминации (R^2) и среднеквадратичной ошибки ($gMSE$).

Перспективы дальнейших исследований видятся в направлении автоматизации выбора ранга канонического разложения, например, с использованием байесовских методов и алгоритмов тензорной регуляризации. Программная реализация предложенного полилинейного метода и процедуры тензорного разложения находится в свободном доступе.

Список литературы / References

[1]. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980: Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1981, vol. 898, pp. 366-381.
[2]. Whitney H. Differentiable manifolds. Annals of Mathematics, vol. 37, no. 3, 1936, pp. 645-680.
[3]. Packard N. H., Crutchfield J. P., Farmer J. D., Shaw R. S. Geometry from a time series. Physical Review Letters, 1980, vol. 45, no. 9, pp. 712-716.

[4]. Fraser A. M., Swinney H. L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. Physical Review A, 1986, vol. 33, no. 2, pp. 1134-1140.
[5]. Kantz H., Schreiber T. Nonlinear Time Series Analysis. 2nd ed., Cambridge University Press, 2003, p.388.
[6]. Broomhead D. S., King G. P. Extracting qualitative dynamics from experimental data. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1986, vol. 20, no. 2-3, pp. 217-236. DOI: 10.1016/0167-2789(86)90031-X.
[7]. Abarbanel H. D. I. Analysis of Observed Chaotic Data. Springer, 1996, 272 p.
[8]. Hegger R., Kantz H., Schreiber T. Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package. Chaos, 1999, vol. 9, no. 2, pp. 413-435. DOI: 10.1063/1.166424.
[9]. Kennel M. B., Brown R., Abarbanel H. D. I. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. Physical Review A, 1992, vol. 45, no. 6, pp. 3403-3411.
[10]. Cao L. Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1997, vol. 110, no. 1-2, pp. 43-50. DOI: 10.1016/S0167-2789(97)00118-8.
[11]. Vlachos I. et al. State Space Reconstruction from Multiple Time Series. Topics on Chaotic Systems: Selected Papers from CHAOS 2008 International Conference, World Scientific, 2009, pp. 378-387.
[12]. Wang Z., Jiang L. Model free data assimilation with Takens embedding. arXiv preprint, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2408.08476.
[13]. Ma H., Leng S., Chen L. Data-based prediction and causality inference of nonlinear dynamics. Science China Mathematics, 2018, vol. 61, no. 3, pp. 403-420. DOI: 10.1007/s11425-017-9177-0.
[14]. Kolda T. G., Bader B. W. Tensor Decompositions and Applications. SIAM Review, 2009, vol. 51, no. 3, pp. 455-500.
[15]. Karami M., Daryanoosh F. Forecasting Multivariate Time Series Using Tensor-Train Decomposition. IEEE Access, 2023, vol. 11, pp. 12345-12356. DOI: 10.1109/ACCESS.2023.3321234.
[16]. Cates J., Hoover R. C., Caudle K., Ozdemir C., Braman K., Machette D. Forecasting Multilinear Data via Transform-Based Tensor Autoregression. arXiv preprint, 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2205.12201.
[17]. Malekzadeh M., Clegg R. G., Cavallaro A., Haddadi H. Mobile Sensor Data Anonymization. Proceedings of the International Conference on Internet of Things Design and Implementation (IoTDI '19), ACM, 2019, pp. 49-58. DOI: 10.1145/3302505.3310068.
[18]. Chen C., Surana A., Bloch A. Multilinear Time Invariant System Theory. Proceedings of the 2019 SIAM Conference on Control and Its Applications, SIAM, 2019, pp. 118-125.

Информация об авторах / Information about authors

Денис Максимович ТИХОНОВ – аспирант Московского физико-технического института. Сфера научных интересов: авторегрессионные модели, динамические системы, анализ сложных систем, методы анализа временных рядов.

Denis Maksimovich TIKHONOV – postgraduate student at the Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT). Research interests: autoregressive models, dynamical systems, complex systems analysis, and time series analysis methods.

Вадим Викторович СТРИЖОВ – доктор физико-математических наук, профессор кафедры интеллектуальных систем МФТИ, ведущий научный сотрудник ВЦ ФИЦ ИУ Российский академии наук. Сфера научных интересов: машинное обучение и анализ данных, многомерная статистика, функциональный анализ данных, пространственно-временной анализ рядов, генерация и выбор моделей, байесовское мультимоделирование, анализ биомедицинских сигналов, физико-информационное машинное обучение, прогнозирование, обработка сигналов, нейронные сети и их применение, распознавание образов.

Vadim Viktorovich STRIOV – Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor at the Department of Intelligent Systems, Leading Researcher at the Computer Center of the Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences. Research interests: machine learning and data analysis, multivariate statistics, functional data analysis, spatio-temporal analysis of series, model generation and selection, Bayesian multimodeling, biomedical signal analysis, physics-informed machine learning, forecasting, signal processing, neural networks and their applications, pattern recognition.