DOI: 10.15514/ISPRAS-2026-38(6)-42



Реализация квазигазодинамического алгоритма на блочно-структурированных адаптивных сетках для задач сжимаемых течений

И.И. Бут, ORCID: 0000-0001-5915-0941 <ivan.but@ispras.ru>

Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН, Россия, 109004, г. Москва, ул. А. Солженицына, д. 25.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия, 125047, Москва, Миусская пл., 4.

Аннотация. В работе представлен трёхмерный решатель для моделирования сжимаемых течений газа, основанный на квазигазодинамической системе уравнений. Решатель реализован в открытом программном комплексе AMReX, что обеспечивает поддержку блочно-структурированных адаптивных сеток и массово-параллельные расчёты на графических процессорах. Пространственная аппроксимация регуляризованных уравнений Навье–Стокса выполнена центральными разностями второго порядка точности, интегрирование по времени явное. Валидация проведена на серии классических тестов: одномерной задаче о распаде разрыва, двумерной задаче о взаимодействии вихря с ударной волной и трёхмерной задаче о дозвуковой свободной струе. Решатель точно воспроизводит ударно-волновые структуры и эволюцию вихревых течений. Применение технологии AMR сокращает число расчётных ячеек в 5–7 раз по сравнению с эквивалентной равномерной сеткой при сохранении разрешающей способности метода. Тесты производительности показывают существенное сокращение вычислительных затрат, достигаемое главным образом за счёт адаптивного измельчения сетки, с дополнительным ускорением при выполнении расчёта на графическом процессоре, что делает разработанный подход перспективным инструментом вычислительной газовой динамики.

Ключевые слова: сжимаемые течения; квазигазодинамические уравнения; блочно-структурированные сетки; численное моделирование; адаптивное измельчение сетки; графические процессоры; программный комплекс AMReX; свободное программное обеспечение.

Для цитирования: Бут И.И. Реализация квазигазодинамического алгоритма на блочно-структурированных адаптивных сетках для задач сжимаемых течений. Труды ИСП РАН, том 38, вып. 6, часть 2, 2026 г., стр. 347–362. DOI: 10.15514/ISPRAS–2026–38(6)–42.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2025-346. Результаты получены с использованием услуг Центра коллективного пользования Института системного программирования им. В.П. Иванникова РАН – ЦКП ИСП РАН.

Block-Structured AMR Implementation of Quasi-Gas Dynamic Algorithm for Compressible Flows

I.I. But, ORCID: 0000-0001-5915-0941 <ivan.but@ispras.ru>

Ivannikov Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences, 25, Alexander Solzhenitsyn st., Moscow, 109004, Russia.

Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, 4, Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia.

Abstract. This work presents a three-dimensional solver for compressible gas flows based on the quasi-gas dynamic (QGD) system of equations. The solver is implemented within the open-source AMReX framework, which provides block-structured adaptive mesh refinement (AMR) and massively parallel computations on graphics processing units (GPUs). The regularized Navier–Stokes equations are approximated by a second-order central-difference scheme in space; time integration is explicit. The solver has been validated on classical benchmark problems: the one-dimensional shock tube (Sod problem), the two-dimensional shock-vortex interaction, and a three-dimensional subsonic free jet (M=0.9, Re=3600). It accurately reproduces shock-wave structures and the evolution of vortical flows. AMR reduces the number of computational cells by a factor of 5 to 7 compared to an equivalent uniform mesh while maintaining resolution. Performance tests demonstrate a substantial reduction in computational cost due primarily to AMR, with additional acceleration provided by GPU execution, establishing the developed approach as a promising tool for computational fluid dynamics.

Keywords: compressible flows; quasi-gas dynamic equations; block-structured mesh; CFD; AMR; GPU; AMReX; open-source software.

For citation: But I.I. Block-Structured AMR Implementation of Quasi-Gas Dynamic Algorithm for Compressible Flows. Trudy ISP RAN/Proc. ISP RAS, vol. 38, issue 6, part 2, 2026, pp. 347-362 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2026-38(6)-42.

Acknowledgements. This work was supported by Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Agreement with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, No. 075-15-2025-346. The results were obtained using the services of the Ivannikov Institute for System Programming (ISP RAS) Data Center.

1. Введение

Численное моделирование сжимаемых течений газа остаётся одной из ключевых задач вычислительной гидродинамики, важной для авиационной, ракетно-космической и энергетической отраслей. Сложность таких течений обусловлена широким диапазоном чисел Маха, наличием сильных разрывов и развитых вихревых и турбулентных структур.

Классические подходы, основанные на уравнениях Навье-Стокса, требуют специальной аппроксимации конвективных членов (TVD- или WENO-схемы) для подавления осцилляций вблизи разрывов. Схемы годуновского типа, основанные на решении задачи Римана, надёжно захватывают ударные волны, однако при расчёте дозвуковых течений с мелкомасштабными вихревыми структурами их численная диссипация может оказаться избыточной. Кроме того, разрешение турбулентных и акустических структур резко увеличивает число ячеек и вычислительные затраты.

Альтернативным подходом является использование квазигазодинамических (КГД) уравнений. Эти уравнения представляют собой регуляризованную систему уравнений Навье–Стокса, в которой к классическим диссипативным членам добавлены слагаемые, пропорциональные малому параметру τ – времени релаксации, связанному с коэффициентом самодиффузии [1]. При $\tau \to 0$ КГД уравнения асимптотически сходятся к уравнениям Навье-Стокса [2,3]. Дополнительные члены имеют дивергентный вид: они стабилизируют счёт сильных разрывов, не нарушая консервативности и не требуя добавок искусственной

вязкости. Для стационарных течений, эти добавки пренебрежимо малы ввиду особенности их построения.

Способы построения КГД уравнений изложены в монографии [1]. Система записывается в дивергентной форме законов сохранения массы, импульса и полной энергии, а поток массы, тензор вязких напряжений и вектор теплового потока представляются суммой навье–стоксовских и КГД слагаемых, что позволяет применять стандартные конечно-разностные методы.

В последние годы КГД уравнения применялись для моделирования широкого круга задач: сверхзвукового обтекания тел, течений в каналах с обратным уступом, взаимодействия вихря с ударной волной, дозвуковых и сверхзвуковых струй [4-11]. КГД-подход описывает ламинарные и турбулентные режимы в рамках единого алгоритма, без моделей турбулентности. Известная реализация – решатель QGDFoam в открытом комплексе OpenFOAM [4,5], показавший высокую точность для сверхзвуковых струй [6-8] и взаимодействия вихря с ударной волной [9]. Однако для трёхмерных расчётов его вычислительные затраты оказываются значительными.

Современные тенденции в вычислительной гидродинамике требуют адаптивных сеток (AMR) и вычислений на графических процессорах (GPU). Для OpenFOAM ведутся отдельные работы в этом направлении, например, проект SPUMA по переносу его алгоритмов на многопроцессорные GPU-архитектуры NVIDIA и AMD [12]. Однако GPU-ускорение не снимает потребности в высоком разрешении: для задач с локализованными ударно-волновыми и вихревыми структурами выигрыш даёт именно адаптивное измельчение сетки.

Одной из открытых платформ, сочетающих блочно-структурированное адаптивное измельчение сетки и вычисления на графических процессорах (GPU), является инфраструктура AMReX [13]. Она обеспечивает распределение данных между вычислительными процессами (MPI), параллельные вычисления с использованием нескольких потоков (OpenMP) и переносимость вычислительных ядер между архитектурами CUDA (NVIDIA), HIP (AMD) и SYCL (Intel).

В работе [9] показано, что адаптивное измельчение сетки и инфраструктура AMReX существенно сокращают вычислительные затраты по сравнению с реализациями КГД (QGDFoam) и центральных схем (rhoCentralFoam) в OpenFOAM. Однако реализация [9] была двумерной: переход к трёхмерным задачам требует расширения вычислительных шаблонов, хранения данных на адаптивных сетках в трёх направлениях и адаптации обмена данными между уровнями.

Цель работы – разработка трёхмерного решателя квазигазодинамических уравнений на базе открытой платформы AMReX, поддерживающей блочно-структурированные адаптивные сетки и переносимую модель параллельных вычислений для центральных процессоров (CPU) и GPU, его верификация на характерных задачах сжимаемой газовой динамики. Новизна состоит в реализации КГД-алгоритма на современной AMR-инфраструктуре в виде единого трёхмерного вычислительного ядра, из которого одномерная и двумерная постановки получаются выбором размерности при сборке, а также в оценке эффективности адаптивного измельчения сетки.

2. Математическая модель и численный алгоритм

В этом разделе представлены квазигазодинамические уравнения описывающие сжимаемые однокомпонентные течения газа [1-3], их дискретизация и численный алгоритм.

2.1 Математическая модель

Квазигазодинамическая система уравнений записывается в дивергентной форме законов сохранения массы, импульса и полной энергии (внешние силы и источники тепла отсутствуют):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j_m = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (j_m \otimes u) + \nabla p = \nabla \cdot \hat{\Pi} \tag{2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (j_m H) = \nabla \cdot \left(\hat{\Pi} \cdot u\right) - \nabla \cdot q \tag{3}$$

Здесь ρ – плотность газа, u – скорость, p – давление, $E = \rho\varepsilon + \rho u^2/2$ – полная энергия единицы объёма, $\varepsilon = p/((\gamma - 1)\rho)$ – удельная внутренняя энергия, $H = (E + p)/\rho$ – полная удельная энтальпия, $\hat{\Pi}$ – тензор вязких напряжений, q – вектор теплового потока, j_m – вектор плотности массового потока. Система уравнений (1) – (3) является регуляризованной формой уравнений Навье–Стокса: дополнительные диссипативные члены, пропорциональные малому параметру τ (времени релаксации), возникают при переходе от мгновенных пространственных средних к пространственно-временным осреднениям, подробнее выкладки представлены в работах [1-3].

Плотность потока массы, тензор вязких напряжений и вектор теплового потока представляются в виде суммы классических (навье-стоксовских) и квазигазодинамических добавок:

$$j_m = \rho u - \tau(\nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p) \tag{4}$$

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi_{NS}} + \hat{\Pi_{QGD}}, \hat{\Pi_{NS}} = \mu_{eff}\left((\nabla \otimes u) + (\nabla \otimes u)^T - \frac{2}{3}\hat{I}(\nabla \cdot u)\right)$$

$$\hat{\Pi_{QGD}} = u \otimes w^* + \tau\left((u \cdot \nabla)p + \gamma p(\nabla \cdot u)\right)\hat{I} \tag{5}$$

$$w^* = \tau(\rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p)$$

$$q = q_{NS} + q_{QGD}, q_{NS} = -k_{eff}\nabla T, q_{QGD} = -\tau\rho u\left((u \cdot \nabla)\varepsilon + p(u \cdot \nabla)\frac{1}{\rho}\right) \tag{6}$$

В классической КГД модели параметр τ определяется через физические свойства среды и связан с процессами релаксации. При $\tau \to 0$ система (1) – (3) асимптотически переходит в уравнения Навье–Стокса. В настоящей работе, согласно рекомендациям из [1] для повышения устойчивости численного алгоритма используется модифицированное определение: $\tau = \alpha_{QGD}\, h_n/a$, где $h_n \in \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ – размер ячейки вдоль нормали к рассматриваемой грани, $a = \sqrt{\gamma\, p/\rho}$ – скорость звука, μ – молекулярная динамическая вязкость. Член $\alpha_{QGD}\, h_n/a$ (с коэффициентом $0 \le \alpha_{QGD} \le 1$) играет роль численной регуляризации, необходимой для устойчивого счёта сильных разрывов на относительно грубых сетках. Величины ρ и p берутся интерполированными на грань, поэтому τ определён на гранях, а не в центрах ячеек.

В настоящей реализации коэффициенты вязкости и теплопроводности определяются в соответствии с КГД-подходом как сумма физических и регуляризующих вкладов:

$$\mu_{eff} = \mu_{phys} + \mu_{QGD} = \mu_{phys} + \tau p Sc_{QGD}, k_{eff} = k_{NS} + k_{QGD} = \frac{\mu_{phys} c_p}{Pr} + \tau p Sc_{QGD}\frac{c_p}{Pr_{QGD}},$$

где $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ – удельная теплоёмкость при постоянном давлении, R – газовая постоянная, Pr – число Прандтля, $\tau p Sc_{QGD}$ и $\tau p Sc_{QGD}\frac{c_p}{Pr_{QGD}}$ – дополнительная КГД-регуляризация. В приведённых выражениях μ_{phys} – молекулярная динамическая вязкость.

Число Шмидта Sc_{QGD} может быть как постоянным, так и зависящим от локального решения. Во втором случае оно задаётся сенсором по модулю градиента плотности Sc_{eff}. Величина Sc_{eff} входит только в μ_{QGD} и k_{QGD} и не изменяет τ, а следовательно, и поток массы (4). Это позволяет удерживать малое число Шмидта в гладкой части течения, поднимая его лишь внутри ударной волны: акустическое ограничение на шаг по времени при этом не меняется вовсе, а параболическое, зависящее от локального значения, остаётся более чем на порядок слабее (см. раздел 2.2).

Представленные уравнения одинаковы на всех уровнях адаптивной сеточной иерархии, особенности обмена данными между уровнями описаны в разделе 3.

2.2 Численная аппроксимация и конечно-разностная схема

Система (1) – (3) решается на блочно-структурированных прямоугольных сетках. Консервативные переменные $(\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, E)$ определены в центрах ячеек (целые узлы i,j,k), в том же контейнере хранятся вспомогательные поля, которые не переносятся потоками, а пересчитываются из консервативных переменных после каждого обновления. Все пространственные производные в уравнениях (1)–(3) аппроксимируются центральными разностями второго порядка. Интегрирование по времени явное. Определяющим ограничением на шаг по времени является акустическое условие Куранта–Фридрихса–Леви: $\Delta t = CFL \cdot min_d\left(\frac{\Delta x_d}{u_d \vee + a}\right)$, где минимум берётся по активным направлениям. В расчётах настоящей работы использовались значения $CFL = 0.2 \div 0.6$. Благодаря регуляризующему действию КГД-членов схема сохраняет устойчивость при CFL до 0.6, что выше типичных значений для явных схем Навье–Стокса. Вязкие члены интегрируются явно, однако в КГД-подходе коэффициенты вязкости и теплопроводности пропорциональны τ, следовательно, шагу сетки, поэтому связанное с ними параболическое ограничение имеет тот же порядок по h, что и акустическое, и в использованном диапазоне параметров более чем на порядок слабее.

Помимо устойчивости, на выбор шага по времени накладывается требование точности. Явная схема первого порядка вносит в уравнение погрешность вида $-\left(\frac{a^2 \Delta t}{2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, то есть отрицательную диффузию, частично компенсирующую КГД-регуляризацию $\nu_{\mathrm{QGD}} = \tau a^2$. Чтобы суммарная диффузия оставалась положительной, требуется $\Delta t \le 2\tau$. Поскольку и Δt, и τ пропорциональны шагу сетки, их отношение от сетки не зависит: $\frac{\Delta t}{\tau} = \frac{\mathrm{CFL}}{\alpha_{\mathrm{QGD}}(1+M)}$. Отсюда требование $\Delta t \le 2\tau$ эквивалентно ограничению $CFL \le 2\alpha_{QGD}(1+M)$. В большинстве задач, используется более строгое условие $CFL \le 2\alpha_{QGD}$, потому его достаточно при любом M.

Значения величин на гранях ячеек вычисляются линейной интерполяцией консервативных переменных.

Последовательность вычислений на одной стадии по времени включает следующие этапы:

1. Пересчёт консервативных переменных в примитивные ρ, u_x, u_y, u_z, p во всех ячейках блока, включая слой призрачных ячеек. Результат сохраняется во временной переменной и далее только читается: без такого кэша преобразование выполнялось бы десятки раз на грань.
2. Интерполяция консервативных переменных на грани, вычисление скорости звука a, параметра τ и вектора w^* на гранях ячеек.
3. Определение плотности потока массы j_m на гранях, формула (4).
4. Вычисление значения плотности на новом временном шаге, формула (1):

$$\rho^{\wedge}_{i,j,k} = \rho_{i,j,k} - \left(j^{mx}_{i+\frac{1}{2},j,k} - j^{mx}_{i-\frac{1}{2},j,k}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x} - \left(j^{my}_{i,j+\frac{1}{2},k} - j^{my}_{i,j-\frac{1}{2},k}\right)\frac{\Delta t}{\Delta y} - \left(j^{mz}_{i,j,k+\frac{1}{2}} - j^{mz}_{i,j,k-\frac{1}{2}}\right)\frac{\Delta t}{\Delta z}$$

5. Вычисление эффективной вязкости μ_{eff} и тензора вязких напряжений $\hat{\Pi}$ (сумма NS и QGD частей), формула (5). Компоненты $\Pi^{\wedge}_{NS}$ вычисляются через градиенты скорости, а $\Pi^{\wedge}_{QGD}$ – через w^* и производные давления.
6. Решение уравнений движения (для компоненты x), формула (2):

$$\rho u^{\hat{x}}_{i,j,k} = (\rho u^x)_{i,j,k} - \left(p_{i+\frac{1}{2},j,k} - p_{i-\frac{1}{2},j,k}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x} - \left(j^{mx}_{i+\frac{1}{2},j,k} u^x_{i+\frac{1}{2},j,k} - j^{mx}_{i-\frac{1}{2},j,k} u^x_{i-\frac{1}{2},j,k}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$-\left(j^{my}_{i,j+\frac{1}{2},k} u^x_{i,j+\frac{1}{2},k} - j^{my}_{i,j-\frac{1}{2},k} u^x_{i,j-\frac{1}{2},k}\right)\frac{\Delta t}{\Delta y} - \left(j^{mz}_{i,j,k+\frac{1}{2}} u^x_{i,j,k+\frac{1}{2}} - j^{mz}_{i,j,k-\frac{1}{2}} u^x_{i,j,k-\frac{1}{2}}\right)\frac{\Delta t}{\Delta z}$$
$$+\left(\Pi^{xx}_{i+\frac{1}{2},j,k} - \Pi^{xx}_{i-\frac{1}{2},j,k}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x} + \left(\Pi^{yx}_{i,j+\frac{1}{2},k} - \Pi^{yx}_{i,j-\frac{1}{2},k}\right)\frac{\Delta t}{\Delta y} + \left(\Pi^{zx}_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \Pi^{zx}_{i,j,k-\frac{1}{2}}\right)\frac{\Delta t}{\Delta z}$$

Аналогичные выражения записываются для $\rho\hat{u}_y$ и $\rho\hat{u}_z$.

7. Вычисление температуры $T = p/(\rho R)$, эффективного коэффициента теплопроводности k_{eff}, удельной внутренней энергии ε, полной энтальпии H и тепловых потоков q, формула (6).
8. Решение уравнения баланса энергии:

$$E^{\wedge}_{i,j,k} = E_{i,j,k} - \left(j^{mx}_{i+\frac{1}{2},j,k} H_{i+\frac{1}{2},j,k} - j^{mx}_{i-\frac{1}{2},j,k} H_{i-\frac{1}{2},j,k}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x}$$
$$-\left(j^{my}_{i,j+\frac{1}{2},k} H_{i,j+\frac{1}{2},k} - j^{my}_{i,j-\frac{1}{2},k} H_{i,j-\frac{1}{2},k}\right)\frac{\Delta t}{\Delta y} - \left(j^{mz}_{i,j,k+\frac{1}{2}} H_{i,j,k+\frac{1}{2}} - j^{mz}_{i,j,k-\frac{1}{2}} H_{i,j,k-\frac{1}{2}}\right)\frac{\Delta t}{\Delta z}$$
$$-\left(q^x_{i+\frac{1}{2},j,k} - q^x_{i-\frac{1}{2},j,k}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x} - \left(q^y_{i,j+\frac{1}{2},k} - q^y_{i,j-\frac{1}{2},k}\right)\frac{\Delta t}{\Delta y} - \left(q^z_{i,j,k+\frac{1}{2}} - q^z_{i,j,k-\frac{1}{2}}\right)\frac{\Delta t}{\Delta z}$$

Вклад тензора вязких напряжений записывается аналогично: на каждой грани суммируются произведения компонент Π на соответствующие компоненты скорости.

9. Обновление поля скорости: $\hat{u^x} = \rho\hat{u}^x/\hat{\rho}, \hat{u^y} = \rho\hat{u}^y/\hat{\rho}, \hat{u^z} = \rho\hat{u}^z/\hat{\rho}$.
10. Определение давления на новом временном слое из уравнения состояния идеального газа:

$$p^{\wedge}_{i,j,k} = (\gamma - 1)\left(E^{\wedge}_{i,j,k} - \frac{\rho^{\wedge}_{i,j,k}}{2}\left(\left(u^{\hat{x}}_{i,j,k}\right)^2 + \left(u^{\hat{y}}_{i,j,k}\right)^2 + \left(u^{\hat{z}}_{i,j,k}\right)^2\right)\right)$$

Вычислительно этапы сгруппированы в три прохода по блоку: (1) заполнение кэша примитивных переменных, (2) построение потоков на гранях всех активных направлений, (3) вычисление дивергенции потоков и источниковых членов.

3. Особенности реализации решателя в AMReX

3.1 Структура данных и организация расчётного шага

Решатель AmrQGD реализован на базе открытой инфраструктуры AMReX, поддерживающей блочно-структурированные адаптивные сетки и параллельные вычисления на центральных и графических процессорах.

Каждый уровень сетки состоит из прямоугольных блоков (Box), объединённых в структуру BoxArray. Их распределение между вычислительными процессами определяется DistributionMapping, а расчётные поля хранятся в MultiFab – наборе массивов данных (FArrayBox) с дополнительными призрачными ячейками. Обход блоков выполняется с помощью MFIter, а параллельные вычисления над ячейками – ParallelFor. Пример организации данных и вычислений приведён в листинге 1.

Для вычисления потоков через грани ячеек КГД-схема использует значения в соседних ячейках, которые могут принадлежать другим блокам или уровням сетки. Необходимые данные размещаются в призрачных ячейках, заполнение которых обеспечивается процедурой FillPatch с использованием данных соседних блоков, интерполяции с грубого уровня и физических граничных условий.

```
using namespace amrex;

// Геометрия и разбиение области на блоки
Box domain(IntVect(0,0,0), IntVect(63,63,63));
BoxArray ba(domain);
ba.maxSize(32);

// Распределение блоков между процессами
DistributionMapping dm(ba);

// 7 компонент состояния и 2 призрачных слоя
MultiFab U(ba, dm, 7, 2);

// Обход блоков
for (MFIter mfi(U, TilingIfNotGPU());
     mfi.isValid(); ++mfi)
{
    Box bx = mfi.tilebox();
    auto u = U.array(mfi);

    // Параллельные вычисления на CPU или GPU
    amrex::ParallelFor(bx,
    [=] AMREX_GPU_DEVICE (int i, int j, int k) noexcept
    {
        // Вычисление значений в ячейках
    });
}
```

Листинг 1. Организация данных и параллельных вычислений в AMReX.
Listing 1. Data organization and parallel computations in AMReX (simplified example).

Для обеспечения консервативности на границах уровней используется FluxRegister, накапливающий расхождения интегральных потоков грубой и мелкой сеток. После завершения подшагов мелкого уровня выполняется соответствующая коррекция консервативных переменных грубого уровня. Проверка сохранения массы и энергии приведена в разделе 4.4.

Вектор состояния содержит пять консервативных переменных (плотность, три компоненты импульса и полная энергия) и два вспомогательных поля (внутренняя энергия единицы объёма и температура). Консервативные переменные обновляются по численным потокам, вспомогательные – пересчитываются после каждого обновления. Для хранения состояния используются два слоя призрачных ячеек, а промежуточные величины размещаются во временных структурах MultiFab.

3.2 Адаптивное измельчение сетки

Решатель поддерживает иерархические адаптивные сетки с коэффициентом измельчения 2 (рис. 1); коэффициент может задаваться отдельно по направлениям, что используется в квазиодномерных и квазидвумерных постановках, где неактивные направления не измельчаются. Процесс адаптации включает:

1. Маркировка ячеек (errorEst): критерии по относительному скачку плотности, модуля скорости и числа Маха между соседними ячейками, а также режим фиксированных областей измельчения.
2. Построение новых сеток (regrid): AMReX строит по маркированным ячейкам новый BoxArray.
3. Данные нового уровня заполняются с использованием стандартных процедур AMReX для интерполяции величин, определённых в центрах ячеек.

4. Для согласования потоков на границах уровней используется механизм FluxRegister, накапливающий разность интегральных потоков через границы ячеек грубого и мелкого уровней. После завершения подшагов мелкого уровня накопленное расхождение используется для консервативной коррекции решения на грубом уровне.
5. Значения консервативных переменных на грубом уровне в областях, покрытых мелкой сеткой, заменяются результатами объёмного усреднения данных мелкого уровня (AverageDown).

По умолчанию используется подциклирование по времени: более мелкие уровни делают несколько шагов (обычно 2) за один шаг грубого уровня.

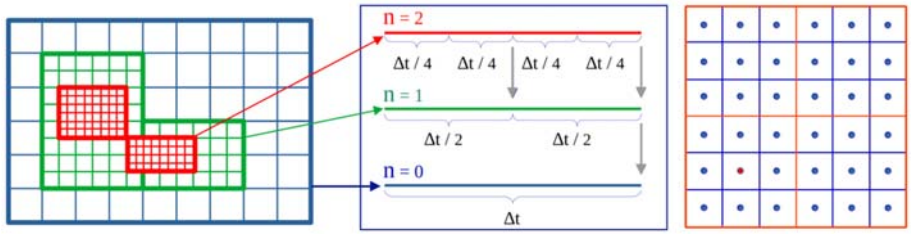


Рис. 1. Структура расчётных сеток и данных решателя AmrQGD.
Fig. 1. Structure of the computational meshes and data layout of the AmrQGD solver.

3.3 Организация GPU вычислений

Все основные вычисления решателя (расчёт параметра τ, вектора w*, потоков массы и энергии, компонент тензора вязких напряжений, теплового потока и обновление расчётных полей) реализованы с использованием механизма параллельного выполнения операций над ячейками сетки (amrex::ParallelFor). Это позволяет использовать единый программный код для вычислений на центральных и графических процессорах в зависимости от выбранной конфигурации сборки.

Размещением данных MultiFab и их перемещением между оперативной памятью и памятью графического процессора управляет AMReX. Вспомогательные поля примитивных переменных, параметров регуляризации и потоков также хранятся в структурах данных AMReX. Параметры модели объединены в структуру, доступную вычислительным ядрам на графическом процессоре. Это исключает необходимость передачи отдельных параметров при каждом обращении к вычислительному ядру.

Обход блоков сетки организован с помощью итератора MFIter. При вычислениях на центральном процессоре используется дополнительное разбиение блоков на более мелкие участки (TilingIfNotGPU), тогда как на графическом процессоре такое разбиение отключается. Минимальное значение локального ограничения шага по времени определяется с использованием параллельной операции редукции ReduceMin. Указанные механизмы обеспечивают выполнение вычислений на центральных и графических процессорах.

Запуск вычислительных ядер на графическом процессоре выполняется асинхронно. Для обеспечения необходимого порядка вычислений отдельные операции разделены на последовательные циклы обработки блоков сетки.

3.4 Структура кода и параметры сборки

Решатель AmrQGD организован в виде отдельного модуля со следующей структурой:

```
AmrQGD/
├── Source/                    – исходные файлы решателя;
│   ├── main.cpp               – точка входа;
│   ├── QGD.H, QGD.cpp         – класс уровня AMR, параметры, шаг по времени, маркировка;
│   ├── QGDBld.cpp             – построение уровней AMR;
│   ├── QGD_setup.cpp          – описания состояний, таблицы ГУ, производные поля;
│   ├── QGD_advance.cpp        – стадии по времени, кэш примитивных, регистры потоков;
│   ├── QGD_bcfill.cpp         – граничные условия и заполнение призрачных ячеек;
│   ├── QGD_io.cpp             – контрольные точки, рестарт, состав plotfile;
│   ├── QGD_state.H, QGD_K.H   – уравнение состояния, шаг по времени, пересчёт T;
│   ├── hydro/QGD_hydro_K.H    – граневые состояния, τ, градиенты, Π, q, потоки;
│   ├── QGD_parm.*, QGD_viscosity.*  – параметры модели вязкости;
│   └──QGD_tagging.H           – сенсоры измельчения;
└── Exec/                      – расчётные задачи: 1D/Sod, 1D/Lax, 2D/vortexShock, 3D/FreeJet;
    └── <case>/                – GNUmakefile, Make.package, inputs, qgd_prob.*;
```

Для компиляции и сборки решателя используется система автоматизации сборки GNU Make совместно со средствами AMReX. Параметры задаются в файле GNUmakefile расчётной задачи. Параметр QGD_DIM = 1, 2 или 3 задаёт физическую размерность, параметры USE_MPI и USE_OMP включают распараллеливание по процессам и потокам, параметры USE_CUDA, USE_HIP и USE_SYCL – сборку под ускорители NVIDIA, AMD и Intel. Активная размерность входит в имя исполняемого файла и каталога объектных файлов, поэтому сборки для разных размерностей не смешиваются.

Разработанный решатель доступен в открытом репозитории [14].

4. Результаты расчётов

Для оценки правильности реализации и точности разработанного решателя была проведена серия вычислительных экспериментов, охватывающих различные режимы течения. Рассматривались одномерная задача о распаде разрыва (проверка захвата ударных волн и контактных границ) [10,18], двумерная задача о взаимодействии вихря с ударной волной (оценка устойчивости алгоритма при сильных нестационарных возмущениях) [9,15] и трёхмерная задача о дозвуковой свободной струе (сравнение осреднённого по времени поля с экспериментом) [7,11,16,17]. Для каждой задачи выполнялось сравнение с эталонными данными (аналитическими решениями, опубликованными численными результатами или экспериментальными данными), а также с результатами расчётов, полученными с использованием решателей OpenFOAM.

4.1 Задача распада разрыва

Задача Сода является модификацией одномерной задачи Римана и служит классическим тестом для проверки корректности реализации законов сохранения, вычисления потоков и воспроизведения разрывных решений. Рассматривается одномерная область $x \in [0,1]$ с начальным разрывом параметров газа в точке $x = 0.5$. Параметры газа: показатель адиабаты $\gamma = 1.4$, удельная газовая постоянная $R = 287$Дж/(кг К), число Прандтля $Pr = 0.72$, физическая вязкость $\mu_{phys} = 0$.

Начальные условия: $(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 1.0), & x \le 0.5 \\ (0.125, 0.0, 0.1), & x > 0.5 \end{cases}$

На границах расчётной области используются условия сноса с нулевым градиентом; за время расчёта возмущения границ не достигают. Расчёт проводится до момента времени $t = 0.25$, когда формируются ударная волна, контактный разрыв и волна разрежения.

Параметры расчёта:

- Расчётная область: $x \in [0,1]$.
- Равномерная сетка: N = 1024, $\Delta x \approx 9.77 \cdot 10^{-4}$.
- Параметры КГД-схемы: $\alpha_{QGD} = 0.3$, $Sc_{QGD} = 0.5$, $Pr_{QGD} = 1$; динамическое число Шмидта отключено.
- Число Куранта: $CFL = 0.3$; интегрирование по времени – по схеме Эйлера (rk1).
- Сравнение проводилось с аналитическим решением [18], а также с результатами QGDFoam и rhoCentralFoam (схема vanLeer) на той же сетке.

На рис. 2 приведены профили плотности, скорости и давления в момент $t = 0.25$. Полученное решение корректно воспроизводит основные структуры течения, характерные для задачи Сода: ударную волну, контактный разрыв и волну разрежения. Заметных нефизичных осцилляций в окрестности разрывов не наблюдается. Сравнение с результатами QGDFoam и rhoCentralFoam показывает хорошее совпадение профилей плотности, скорости и давления, различия между решениями визуально неразличимы в масштабе представленных графиков.

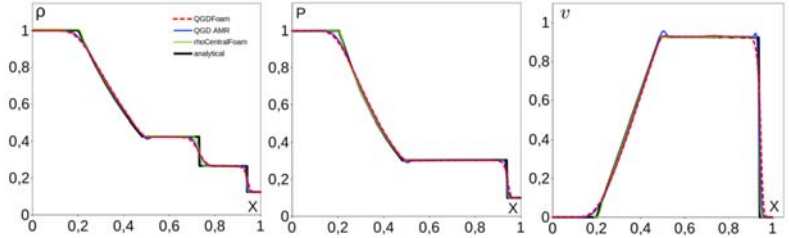


Рис. 2. Профили плотности, давления и скорости в задаче Сода в момент t = 0.25. Сплошная линия – аналитическое решение, синяя – AmrQGD.
Fig. 2. Density, pressure and velocity profiles for the Sod shock tube problem at t=0.25. Solid line – analytical solution; blue line– numerical solution obtained by the AmrQGD solver.

4.2 Задача о взаимодействии вихря с ударной волной

Задача взаимодействия вихря с ударной волной используется для проверки способности схемы устойчиво разрешать одновременное присутствие ударной волны, вихревого возмущения и порождаемых ими акустических волн.

Рассматривается двумерная область прямоугольной формы 2 × 1м (рис. 3, 4). В начальный момент времени вертикальная ударная волна с числом Маха $M_s = 1.5$ расположена при $x = 0.5$м. Слева от ударной волны, в точке $(0.25, 0.5)$м, задаётся изэнтропический вихрь. Профиль окружной скорости вихря задаётся кусочно-линейной функцией:

$$v_\theta(r) = \begin{cases} v_m \frac{r}{a}, & r \le a \\ v_m \frac{a}{a^2 - b^2}\left(r - \frac{b^2}{r}\right), & a < r \le b, \\ 0, & r > b \end{cases}$$

где $a = 0.075$м - внутренний радиус вихря, $b = 0.175$м - внешний радиус. Максимальная окружная скорость, соответствует числу Маха $M_v = 0.9$ ($v_{max} = M_v\sqrt{\gamma}$).

Температура внутри вихря определяется из условия изэнтропичности, а плотность и давление – через уравнение состояния идеального газа. Параметры газа: $\gamma = 1.4$, $R = 287$Дж/(кг К). Параметры набегающего потока перед ударной волной $\rho_\infty = 1$ кг/м³ и $p_\infty = 1$ Па, откуда скорость звука $a_\infty = \sqrt{\gamma} \approx 1.18$ м/с. Физическая вязкость отсутствует, число Прандтля Pr = 0.7.

Граничные условия: на верхней и нижней границах задаются условия скольжения, на левой границе – параметры набегающего потока, на правой границе используется мягкое выходное условие с нулевым градиентом. Расчёт проводится до момента $t = 0.7$с, когда вихрь полностью проходит через ударную волну.

Параметры расчёта:

- Сетка: базовая сетка 100×50 ячейки, до семи уровней измельчения с коэффициентом 2 в плоскости течения, перестроение каждые два шага грубого уровня, критерий – относительный скачок плотности с порогом $2\cdot10^{-3}$. Базовый расчёт для сравнения выполнялся на равномерной сетке 1600 ячеек по оси OY.
- Параметры КГД: $\alpha_{QGD} = 0.2$, $Sc_{QGD} = 0.1$, $Pr_{QGD} = 1$; включено динамическое число Шмидт Sc_{eff}. $Sc_{eff} = 1.0$ в области больших градиентов плотности, $Sc_{eff} = 0.1$в остальной области.
- Число Куранта: $CFL = 0.2$, интегрирование по времени – схема Эйлера (rk1).
- Сравнение: с эталонными результатами из [15], с QGDFoam и rhoCentralFoam (схема vanLeer).

На рис. 3 представлены поля численного шлирена $Sch = ln$ для различных схем, визуализация выполнена при $Sch \in [0.05; 2.4]$. Решатели rhoCentralFoam и QGDFoam воспроизводят основные особенности течения. В рассматриваемой постановке расчёт rhoCentralFoam со схемой vanLeer требовал уменьшения числа Куранта до $CFL < 0.05$ для предотвращения появления нефизичных осцилляций, в то время как QGDFoam устойчив при $CFL = 0.2$.

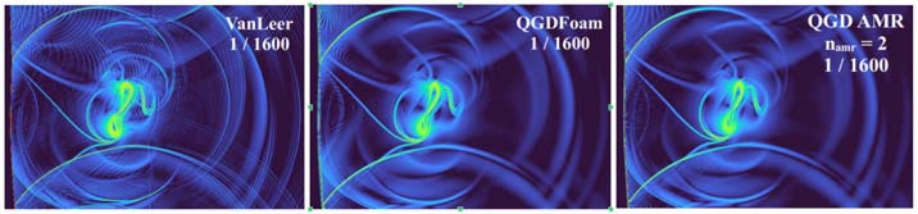


Рис. 3. Численный шлирен для задачи взаимодействия вихря с ударной волной M_v=0.9, Ms=1.5 в момент t=0.7c. Результат AmrQGD на сетке 1/1600.
Fig. 3. Numerical schlieren for the problem of a shock vortex interaction with Mv=0.9, Ms=1.5 at the moment t=0.7s. The result is AmrQGD on a 1/1600 mesh.

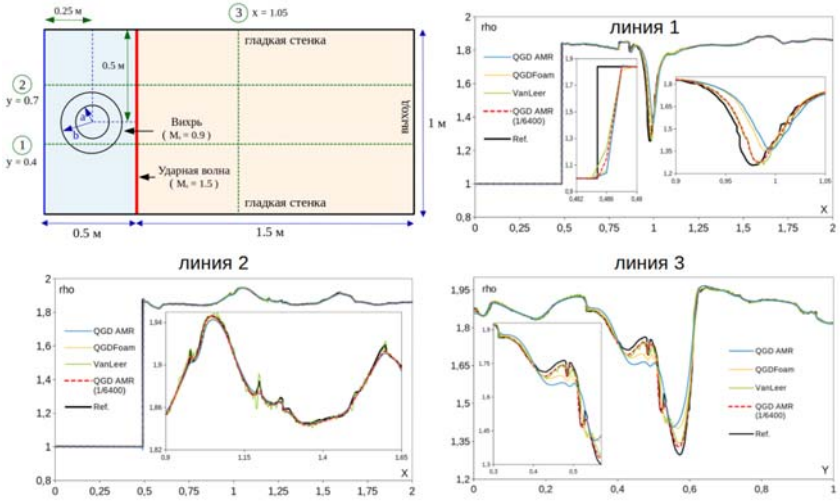


Рис. 4. Сравнение графиков поля плотности на 3 эталонных линиях.
Fig. 4. Comparison of density field on 3 reference lines.

При $CFL = 0.2$ решение AmrQGD хорошо согласуется с результатом QGDFoam по положению ударно-волновых структур и форме вихревого возмущения: на сетке 1/1600 видны деформация вихря, генерация двух вторичных вихрей и слабые отражённые ударные волны. При AMR с тремя уровнями измельчения число активных ячеек сокращается примерно в 5–7 раз по сравнению с равномерной сеткой эквивалентного максимального разрешения, без заметного ухудшения разрешения ударно-вихревых структур.

Количественное сравнение проводилось на профилях плотности в трёх сечениях (рис. 4).

Максимальное расхождение между AmrQGD (сетка эквивалентная 1/6400) и эталонными данными [15] на профилях плотности в выбранных сечениях не превышает 5% в зонах с большими градиентами и 2% в остальной области.

Таким образом, задача подтверждает корректность реализации алгоритма на адаптивных сетках и возможность существенного сокращения числа расчётных ячеек без заметной потери точности.

4.3 Задача о дозвуковой струе M=0.9, Re=3600

Рассматривается свободная струя, истекающая в покоящуюся среду того же газа. Струя истекает из круглого сопла диаметром $D = 0.0079$м. Параметры на срезе сопла определяется по физическим параметрам газа и соответствуют экспериментальным условиям [16]: число Маха$M = 0.9$, число Рейнольдса$\Re = \rho_j U_j D/\mu_j = 3600$, скорость$U_j = 286$ м/с, статическая температура$T_j = 256$K, статическое давление$p_j = 1823$Па. Согласно рекомендациям [17], на входной границе задаётся профиль продольной скорости, формирующий тонкий ламинарный кольцевой сдвиговой слой:$U(r) = 0.5U_j\left[1 + tanh\left(10\left(1 - \frac{2r}{D}\right)\right)\right]$.

Расчётная область представляет собой прямоугольный параллелепипед длиной 63 D по оси струи и 21 D в поперечных направлениях (рис. 5).

Граничные условия: на входе – фиксированные профили скорости и температуры, для давления задаётся градиент, обеспечивающий заданный массовый расход; на боковых и выходной границах – неотражающие (волновые) условия.

Выбор режима$M = 0.9, \Re = 3600$обусловлен тем, что в этом диапазоне струя остаётся дозвуковой, но уже демонстрирует развитые гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. Задача является стандартным тестом для методов, моделирующих рост возмущений в сдвиговых слоях без привлечения моделей турбулентности

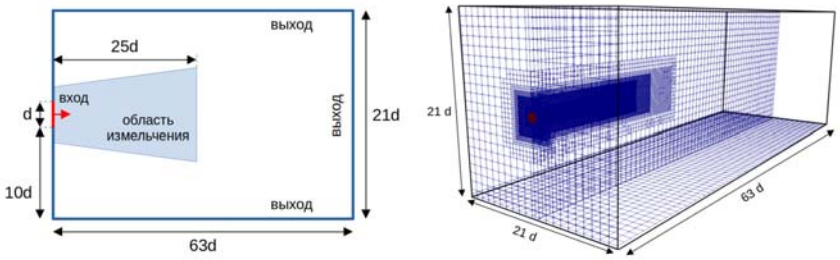


Рис. 5. Геометрия расчётной области для струи M = 0.9, Re = 3 600.
Fig. 5. Geometry of the computational domain for the free jet M = 0.9, Re = 3 600.

Параметры расчёта

- Расчётная сетка: в AMReX (amr = off) и OpenFOAM использовалась сетка с 5 фиксированными уровнями измельчения, без динамической адаптации (рис. 5). Базовая сетка 26×78×26 ячеек, коэффициент измельчения 2 на каждом уровне; шаг

на пятом уровне даёт около 40 ячеек на диаметр, что соответствует рекомендациям из [11,16,17], общее число ячеек порядка 3 млн. В варианте с динамической адаптацией (amr = on) используются те же 5 уровней, критерий – относительный скачок числа Маха.

- Параметры КГД:$\alpha_{QGD} = 0.2$, $Sc_{QGD} = 0.1$, Pr_QGD = 0.72; динамическое число Шмидта отключено. Молекулярная вязкость задаётся законом Сазерленда, откалиброванным по условиям на срезе сопла, число Прандтля Pr = 0.72.
- Число Куранта: CFL = 0.4; интегрирование по времени – по схеме Эйлера (rk1). Осреднение по времени включается с $t = 3\cdot10^{-3}$ с, расчёт ведётся до $t = 8\cdot10^{-3}$ с.
- Сравнение проводится с экспериментальными данными [16], а также с результатами решателей QGDFoam и rhoCentralFoam (схема vanLeer) [11,17].

На рис. 6 показано распределение осреднённого по времени числа Маха вдоль оси струи. Получено хорошее согласование осреднённого осевого поля струи с экспериментальными данными [16]; при этом rhoCentralFoam (схема vanLeer) в области распада струи демонстрирует несколько более высокие значения числа Маха. Пульсационные характеристики струи в настоящей работе не рассматривались.

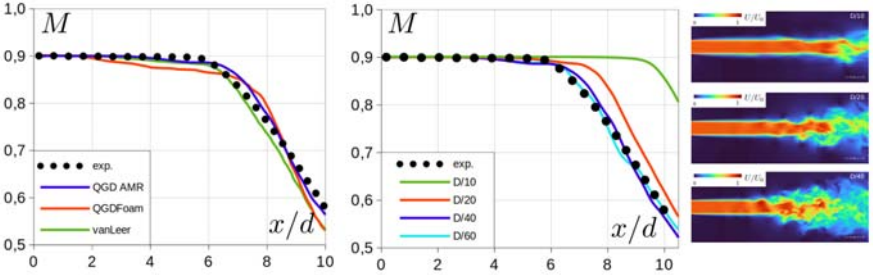


Рис. 6. Струя M = 0.9, Re = 3 600
Fig. 6. Free jet M = 0.9, Re = 3 600.

4.4 Проверка консервативности на адаптивной сетке

Консервативность составного решения проверялась на замкнутом тесте, построенном на начальном состоянии задачи 4.2: начальные данные сохранены, а на левой и правой границах заданы условия скольжения, так что поток через границы отсутствует. Расчёт: 300 шагов грубого уровня, базовая сетка 80×32, CFL = 0.2, перестроение сеток каждые два шага; «два уровня» – уровни 0-1, «три уровня» – уровни 0-2. Составные интегралы массы M и полной энергии E вычислялись по всей иерархии с исключением покрытых ячеек и только в моменты полной синхронизации – после подциклов мелких уровней, коррекции потоков и усреднения по уровням. На рис. 7 и в табл. 1 приведён относительный дрейф $\delta m = |M(t) - M(0)|/|M(0)|$ и $\delta E = |E(t) - E(0)|/|E(0)|$, в таблице – его максимум по всей истории расчёта.

При включённой коррекции потоков относительные отклонения интегральных массы и полной энергии не превышают 10^{-14}, что соответствует уровню ошибок округления при вычислениях с двойной точностью. Без коррекции потоков отклонения достигают 10^{-6}–10^{-5} после появления измельчённых областей. Дополнительно проверена воспроизводимость результатов при различных конфигурациях параллельных вычислений на центральных процессорах. Для расчётов с тремя уровнями адаптивной сетки использовались конфигурации с 4 процессами и 1 потоком на процесс, 1 процессом и 8 потоками, 2 процессами и 4 потоками, а также 1 процессом и 5 потоками с дополнительным разбиением блоков на участки размером 4 × 4 ячейки. Во всех случаях получено точное совпадение с результатами последовательного расчёта по всем компонентам вектора состояния на каждом уровне сетки.

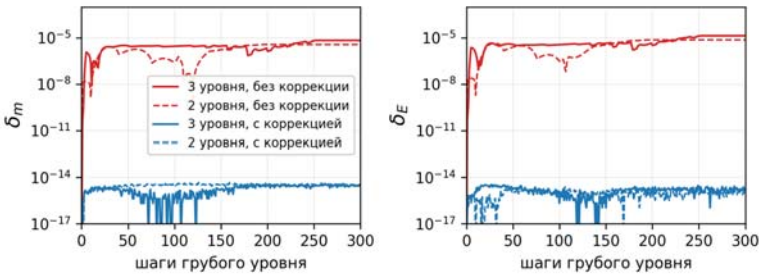


Рис. 7. Относительный дрейф составных массы δm и полной энергии δE в зависимости от числа шагов грубого уровня.
Fig. 7. Relative drift of the composite mass and total energy versus the number of coarse time steps.

Табл. 1. Максимальный относительный дрейф составных массы и полной энергии за 300 шагов грубого уровня.
Table 1. Maximum relative drift of the composite mass and total energy over 300 coarse time steps.

Уровни	Коррекция потоков	max δm	max δE
1 (уровень 0)	–	$5.9\cdot10^{-15}$	$3.3\cdot10^{-15}$
2 (уровни 0–1)	включена	$4.6\cdot10^{-15}$	$2.4\cdot10^{-15}$
2 (уровни 0–1)	отключена	$3.6\cdot10^{-6}$	$7.3\cdot10^{-6}$
3 (уровни 0–2)	включена	$4.2\cdot10^{-15}$	$3.4\cdot10^{-15}$
3 (уровни 0–2)	отключена	$6.8\cdot10^{-6}$	$1.4\cdot10^{-5}$

4.5 Оценка производительности и GPU ускорения

Оценка производительности проводилась на задаче взаимодействия вихря с ударной волной. Для расчётов использовались 12 ядер (шесть двухъядерных процессоров Intel Xeon 5160 3.00 ГГц) одного вычислительного узла и видеокарта NVIDIA GeForce RTX 2060. Производительность оценивалась на сетке с разрешением 1600 ячеек по оси OY. Во всех расчётах использовался постоянный шаг по времени $\Delta t = 10^{-5}$ с, конечное время расчёта составляло $t_{end} = 0.01$ с.

Для расчёта без адаптации на один MPI-процесс приходилось около 427 тыс. ячеек, тогда как при использовании адаптивного измельчения сетки среднее число активных ячеек составляло около 40 тыс. Значение может изменяться в зависимости от выбранного критерия адаптации.

По данным рис. 8, AmrQGD с AMR выполняет расчёт примерно в 15 раз быстрее rhoCentralFoam и в 32 раза быстрее QGDFoam.

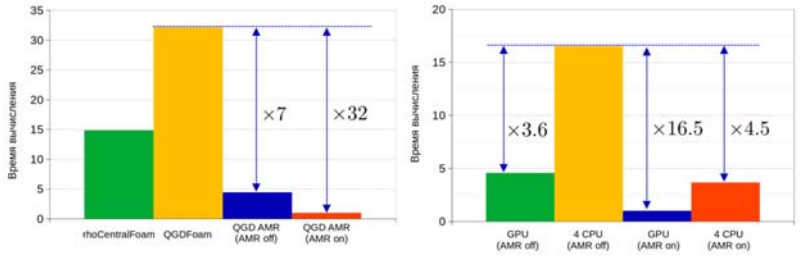


Рис. 8. Производительность решателей на задаче о прохождении вихря через ударную волну.
Fig. 8. Solver performance on the shock–vortex interaction problem.

Использование графического ускорителя NVIDIA GeForce RTX 2060 обеспечивает дополнительное ускорение по сравнению с CPU-версией решателя. Для расчёта без AMR ускорение в сравнении с 4 ядрами CPU составляет около 3.6 раза.

Наибольший вклад в сокращение времени расчёта вносит адаптивное измельчение сетки, уменьшающее число активных ячеек; дополнительное ускорение даёт выполнение вычислений на графическом процессоре.

5. Заключение

В работе представлен трёхмерный решатель AmrQGD для моделирования течений сжимаемого газа на основе квазигазодинамической системы уравнений. Решатель реализован на базе открытой платформы AMReX с поддержкой адаптивного измельчения расчётной сетки, параллельных вычислений с использованием MPI и OpenMP, а также выполнения расчётов на графических процессорах.

Корректность реализации проверена на трёх тестовых задачах: о распаде разрыва (задача Сода), о взаимодействии вихря с ударной волной и о дозвуковой свободной струе. Результаты хорошо согласуются с аналитическим решением, опубликованными численными данными и экспериментальными измерениями, подтверждая способность решателя воспроизводить ударно-волновые структуры, контактные разрывы и вихревые течения.

Отдельно проверена консервативность решения на адаптивной сетке. При включённой коррекции потоков на границах уровней дрейф полной массы и энергии остаётся на уровне ошибки округления. Результат не зависит от способа распараллеливания, расчёты на разном числе MPI-процессов и потоков OpenMP дают совпадающий результат.

Показано, что адаптивное измельчение сетки существенно сокращает число активных ячеек по сравнению с равномерными сетками эквивалентного разрешения. Дополнительное ускорение даёт использование GPU. Таким образом, разработанный решатель AmrQGD сочетает возможности КГД-подхода, адаптивного измельчения сетки и современных средств параллельных вычислений, обеспечивая эффективное моделирование сжимаемых течений.

Дальнейшее развитие решателя связано с расширением класса решаемых задач, включая многокомпонентные течения, течения с химическими реакциями, а также с дальнейшей оптимизацией для современных вычислительных архитектур.

Список литературы / References

[1]. Елизарова Т.Г., Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений, Научн. мир, М., 2007. 351с. (in Russian).

[2]. Шеретов Ю.В., Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении, М., Ижевск, 2009. 400 с. (in Russian).

[3]. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с. (in Russian).

[4]. Kraposhin M.V., Smirnova E.V., Elizarova T.G., Istomina M.A. Development of a new OpenFOAM solver using regularized gas dynamic equations, Computers & Fluids, 2018. vol. 166. pp. 163-175. DOI: 10.1016/j.compfluid.2018.02.010.

[5]. Kraposhin M.V., Ryazanov D.A., Elizarova T.G. Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM, Computer Physics Communications, 2022, vol. 271, p. 108216. DOI: 10.1016/j.cpc.2021.108216.

[6]. Epikhin A.S., Elizarova T.G. Numerical simulation of underexpanded supersonic jets impingement on an inclined flat plate, Thermophys. Aeromech., 2021, vol. 28, pp. 479-486. DOI: 10.1134/S0869864321040028.

[7]. Epikhin A., But I. Numerical Simulation of Supersonic Jet Noise Using Open Source Software, Lecture Notes in Computer Science, 2023, vol. 14077. DOI: 10.1007/978-3-031-36030-5_24.

[8]. But I, Epikhin A. Numerical investigation of supersonic two-component jet flow. Physics of Fluids, 2025, vol. 37, issue 11. DOI: 10.1063/5.0291051.

[9]. But I., Epikhin A., Kirushina M., Elizarova T. Implementation of the QGD Algorithm Using AMR Technology and GPU Parallel Computing, Lecture Notes in Computer Science, 2024, vol. 14838. DOI: 10.1007/978-3-031-63783-4_8.

[10]. Epikhin A, But I. Development of a new solver for homogenous mixture based on regularized gas dynamic equation system. Int J Numer Meth Fluids, 2025, vol. 97, issue 1, pp. 1-19. DOI: 10.1002/fld.5333.

[11]. Epikhin A., Kraposhin M. Prediction of the Free Jet Noise Using Quasi-gas Dynamic Equations and Acoustic Analogy. Lecture Notes in Computer Science, 2020, vol. 12143. DOI: 10.1007/978-3-030-50436-6_16.

[12]. Bnà S. et al. SPUMA: A minimally invasive approach to the GPU porting of OPENFOAM®. Computer Physics Communications, 2026, vol. 321, p. 110009.

[13]. Zhang W. et al. AMReX: a framework for block-structured adaptive mesh refinement. The Journal of Open Source Software, 2019, vol. 4, issue 37, pp. 1370. DOI: 10.21105/joss.01370.

[14]. AmrQGDSolvers. Available at: https://github.com/unicfdlab/AmrQGDSolvers, accessed 15.04.2026.

[15]. 5th International Workshop on High-Order CFD Methods (HiOCFD5), Available at: https://how5.cenaero.be/, accessed 15.04.2026.

[16]. Stromberg J.L., McLaughlin D.K., Troutt T.R. Flow field and acoustic properties of a Mach number 0,9 jet at a low Reynolds number, Journal of sound and vibration, 1980, vol. 72, issue 2, pp. 159-176. DOI: 10.1016/0022-460X(80)90650-1.

[17]. Epikhin A., Kraposhin M., Vatutin K. The numerical simulation of compressible jet at low Reynolds number using OpenFOAM, E3S Web of Conferences, 2019, vol. 128, p. 10008. DOI: 10.1051/e3sconf/201912810008.

[18]. Sod G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. Journal of computational physics, 1978, vol. 27, issue 1, pp.1-31. DOI: 10.1016/0021-9991(78)90023-2.

Информация об авторах / Information about authors

Иван Игоревич БУТ – научный сотрудник лаборатории цифрового моделирования технических систем, Института системного программирования им. В.П. Иванникова РАН и научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Сфера научных интересов: аэродинамика, вычислительная гидродинамика, асимптотические методы.

Ivan Igorevich BUT – researcher at the Laboratory of Digital Modeling of Technical Systems of the Ivannikov Institute of System Programming of the Russian Academy of Sciences, and the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences. Research interests: aerodynamics, CFD, asymptotic methods.